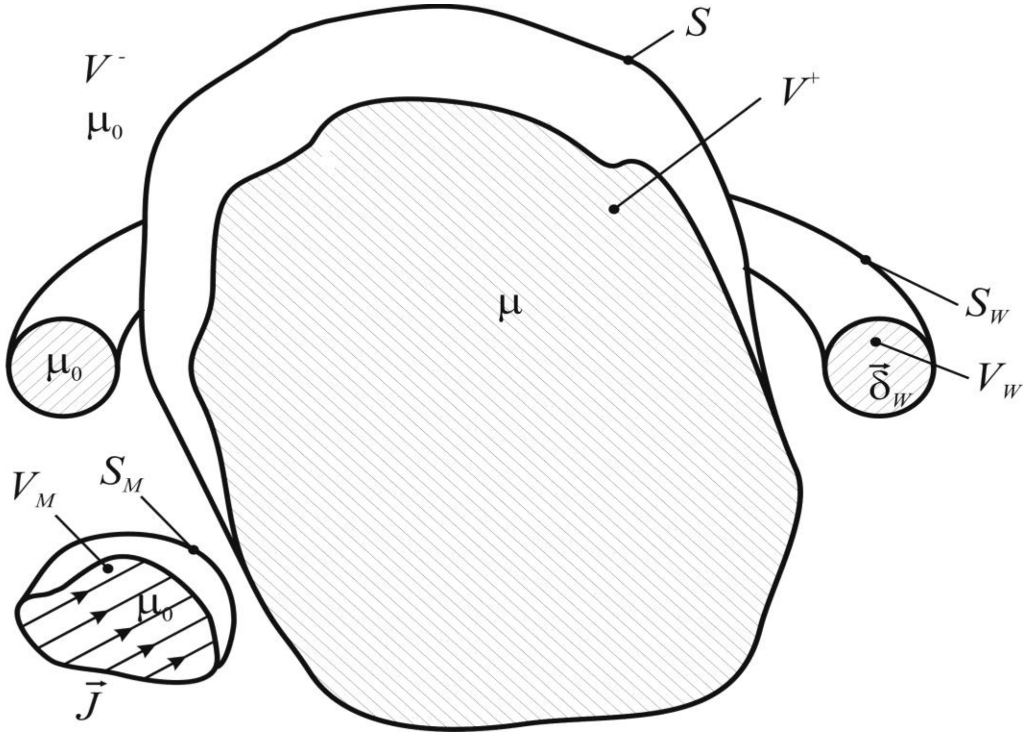
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

МЕТОД ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ ДЛЯ АНАЛІЗУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Доповідач:
провідний науковий співробітник
відділу електромагнітних систем,
д.т.н., професор
Жильцов Андрій Володимирович

КИЇВ - 2023

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ МАГНИТОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ



$$rot\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad div\vec{B} = 0 \qquad div\vec{D} = \rho$$

Стаціонарне магнітне поле

$$rot\vec{H} = \vec{\delta} \qquad div\vec{B} = 0 \qquad \text{в } V$$

$$Rot\vec{H} = 0 \qquad Div\vec{B} = 0 \qquad \text{на } S$$

де

$$Rot\vec{H}(Q) = \vec{n}_Q \times \left(\vec{H}^-(Q) - \vec{H}^+(Q)\right)$$

$$Div\vec{B}(Q) = \vec{n}_Q \left(\vec{B}^-(Q) - \vec{B}^+(Q)\right)$$

феромагнітне середовище

ізотропне		анізотропне	
однорідне	$\vec{B} = \mu\vec{H}$	однорідне	$\vec{B} = \mu_{i,j}\vec{H}$
неоднорідне	$\vec{B} = \mu(Q)\vec{H}$	нелінійна (гістереризна)	$\vec{B} = f\left(\vec{H}\right)$
нелінійна (безгістереризна)	$\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$		

МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ

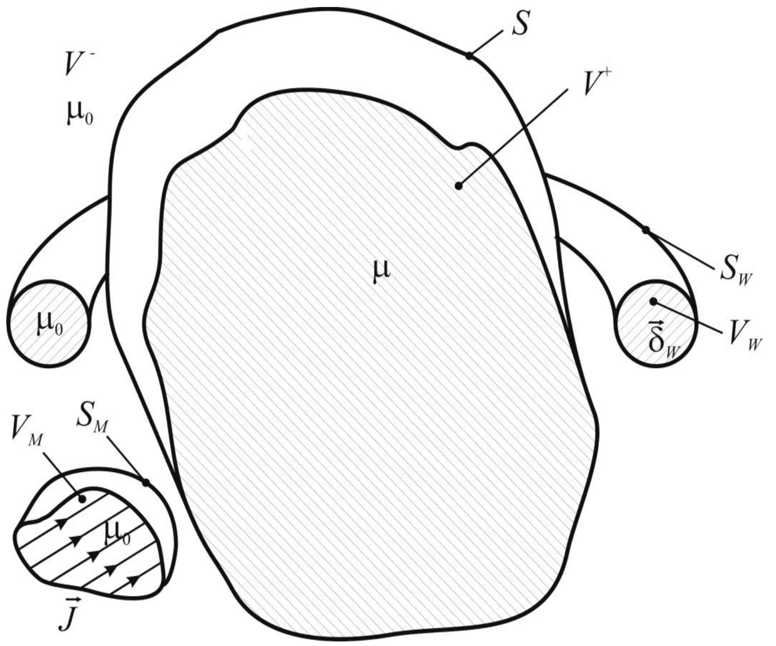
ПОЛЬОВІ МЕТОДИ	ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ
МЕТОД СІТОК, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	**ГРАНИЧНІ**, ПРОСТОРОВІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Розвиток інтегральних методів розрахунку електромагнітних полів

Г. А. ГРІНБЕРГ
І. Д. МАЄРГОЙЗ
Є. І. ПЕТРУШЕНКО
І. П. СТАДНИК
І. І. ПЕККЕР
С. А. АРІНЧИН
та ін.

О. В. ТОЗОНІ
Є. В. КОЛЕСНИКОВ
С. С. РОМАНОВИЧ
С. Т. ТОЛМАЧОВ
П. О. КУРБАТОВ
В. М. МИХАЙЛОВ

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ МАГНИТОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ



$$\vec{B}=rot\vec{A} \qquad div\vec{A}=0$$

$$\Delta\vec{A}=-\mu_0\vec{\delta}_W \; в\,області\,V_W,$$

$$\Delta\vec{A}=0\; в\,області\,V;$$

$$\vec{n}\times\vec{A}^+=\vec{n}\times\vec{A}^-,$$

$$\frac{1}{\mu}\vec{n}\times rot\vec{A}^+=\frac{1}{\mu_0}\vec{n}\times rot\vec{A}^-$$

$$\vec{H}=rot\vec{A} \qquad div\vec{A}=0$$

$$\Delta\vec{A}=-\vec{\delta}_W \; в\,області\,V_W,$$

$$\Delta\vec{A}=0\; в\,області\,V;$$

$$\mu\vec{n}\times\vec{A}^+=\mu_0\vec{n}\times\vec{A}^-,$$

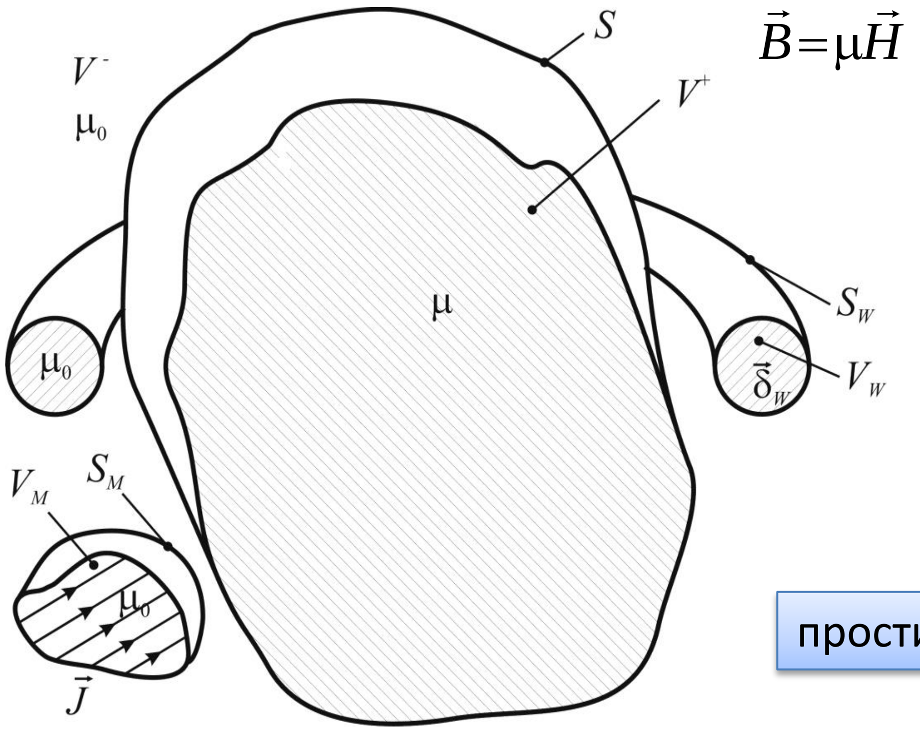
$$\vec{n}\times rot\vec{A}^+=\vec{n}\times rot\vec{A}^-$$

Векторні вторинні джерела: **простий шар струмів намагнічування** **подвійний шар струмів намагнічування**

Скалярні вторинні джерела: подвійний шар магнітних зарядів | простий шар магнітних зарядів

Кусково-однорідне середовище замінюється однорідним з введенням на границі розділу середовищ вторинних джерел, густина яких повинна бути такою, щоб магнітне поле у однорідному середовищі співпадала з магнітним полем у кусково-однорідному середовищі, тобто ці густини вторинних джерел повинні задовольняти певним рівнянням – інтегральним рівнянням.

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ГУСТИН ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ. КВАЗІСТАЦІОНАРНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ



$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

простий шар струмів намагнічування

$$\vec{i}\,(Q)+\frac{\lambda}{2\pi}\oint\!\!\!\oint_S \frac{\vec{n}_Q\times\vec{i}\,(M)\times\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3}dS_M=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_{V_W}\frac{\vec{n}_Q\times\vec{\delta}_W(M)\times\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3}dV_M$$

подвійний шар магнітних зарядів

$$\tau(Q)+\frac{\lambda}{2\pi}\oint\!\!\!\oint_S \tau(M)\frac{\vec{r}_{MQ}\vec{n}_M}{r_{MQ}^3}dS_M=-2\lambda\varphi_0(Q)+C$$

простий шар магнітних зарядів

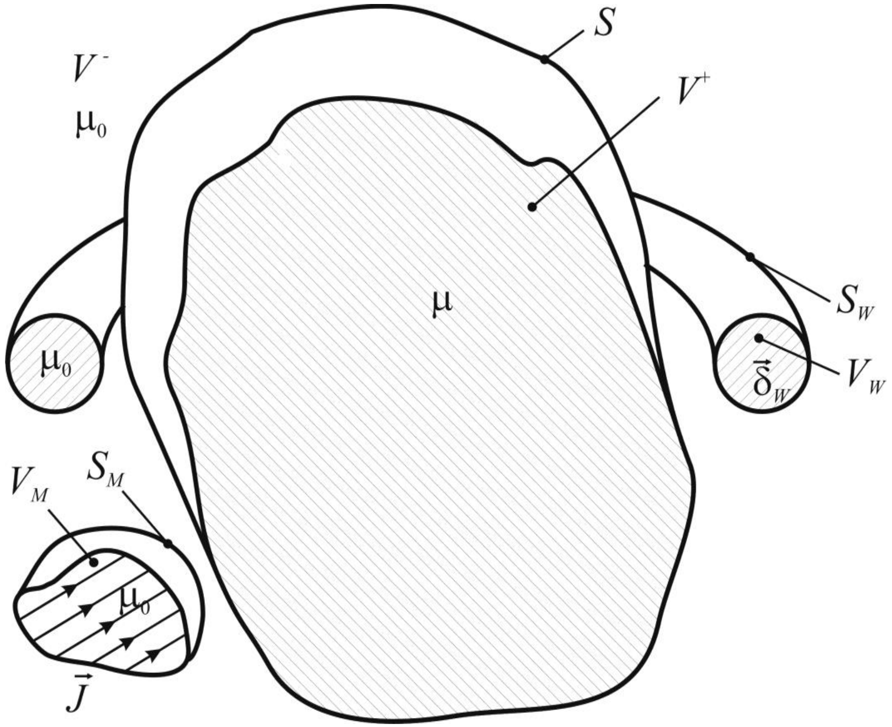
$$\sigma_M(Q)-\frac{\lambda}{2\pi}\oint\!\!\!\oint_S \sigma_M(M)\left(\frac{\vec{r}_{MQ}\vec{n}_Q}{r_{MQ}^3}-\frac{2\pi}{S}\right)dS_M=\mu_0\frac{\lambda}{2\pi}\int_{S_W}\frac{\left[\vec{\delta}_W(M)\times\vec{r}_{MQ}\right]\vec{n}_Q}{r_{MQ}^2}dS_M$$

подвійний шар струмів намагнічування

$$\vec{\eta}(Q)+\frac{\lambda}{2\pi}\oint\!\!\!\oint_S \vec{\eta}(P)\frac{\left(\vec{r}_{PQ}\vec{n}_P\right)}{r_{PQ}^3}dS_P=2\lambda\vec{A}_0(Q)$$

$$\lambda=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}$$

МЕТОД ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ. ТРИВИМІРНА ЗАДАЧА.



$$\vec{B}=\mu(H)\vec{H}$$

$$rot\vec{H}=\vec{\delta} \qquad div\vec{B}=0 \qquad \text{в } V$$

$$Rot\vec{H}=0 \qquad Div\vec{B}=0 \qquad \text{на } S$$

де

$$Rot\vec{H}(Q)=\vec{n}_Q\times\left(\vec{H}^-(Q)-\vec{H}^+(Q)\right)$$

$$Div\vec{B}(Q)=\vec{n}_Q\left(\vec{B}^-(Q)-\vec{B}^+(Q)\right)$$

$$\vec{H}(Q)=\vec{H}^{(B)}(Q)+\vec{H}^{(Б)}(Q) \qquad \boxed{\vec{H}^{(Б)}(Q)=-grad_Q\varphi_M(Q)}$$

$$\Delta\varphi_M^+(Q)=-\frac{\rho_M(Q)}{\mu_0}, \quad Q\in V^+;$$

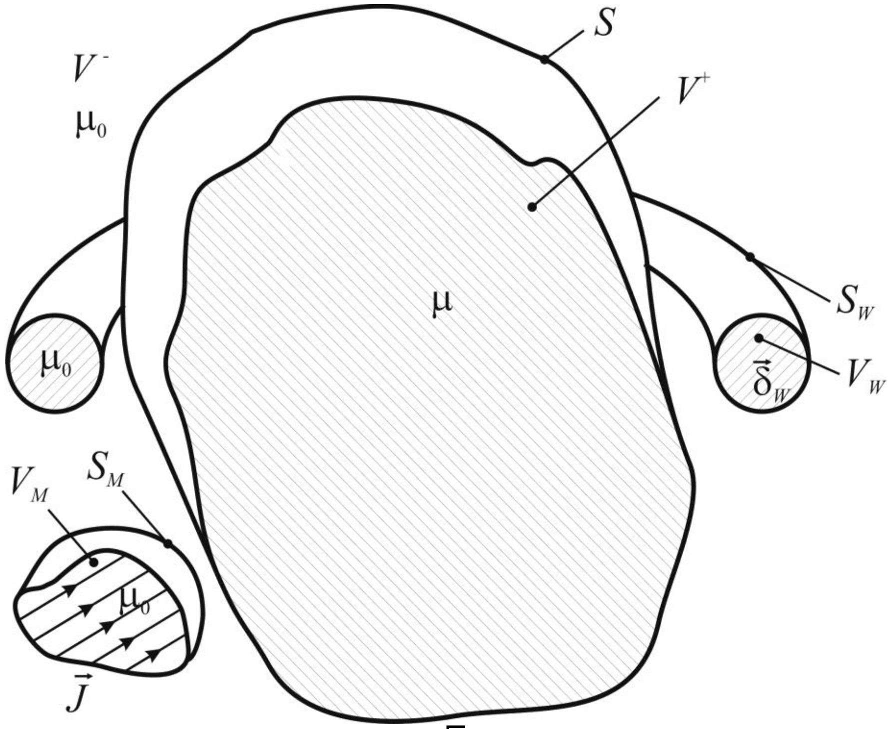
$$\Delta\varphi_M^-(Q)=0, \quad Q\in V^-;$$

$$\varphi_M^+(Q)=\varphi_M^-(Q), \quad Q\in S;$$

$$\mu(Q)\frac{\partial\varphi_M^+(Q)}{\partial n}-\mu_0\frac{\partial\varphi_M^-(Q)}{\partial n}=\left(\mu(Q)-\mu_0\right)H_n^{(B)}(Q), \quad Q\in S;$$

$$\rho_M(Q)=-\frac{\mu_0\vec{H}(Q)\,grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)}$$

МЕТОД ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ. ТРИВИМІРНА ЗАДАЧА.



$$\int_S \sigma_M(Q)\,dS_Q + \int_{V^+} \rho_M(Q)\,dV_Q = 0$$

$$\sigma_M(Q) - \frac{1}{2\pi}\oint_S \sigma_M(M)\left[\lambda(Q)\frac{\vec r_{MQ}\vec n_Q}{r_{MQ}^3} - \frac{1}{S}\oint_S \lambda(P)\frac{\vec r_{MP}\vec n_P}{r_{MP}^3}dS_P\right]dS_M =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{V^+} \rho_M(M)\left[\lambda(Q)\frac{\vec r_{MQ}\vec n_Q}{r_{MQ}^3} - \frac{1}{S}\oint_S \lambda(P)\frac{\vec r_{MP}\vec n_P}{r_{MP}^3}dS_P - \frac{2\pi}{S}\right]dV_M +$$

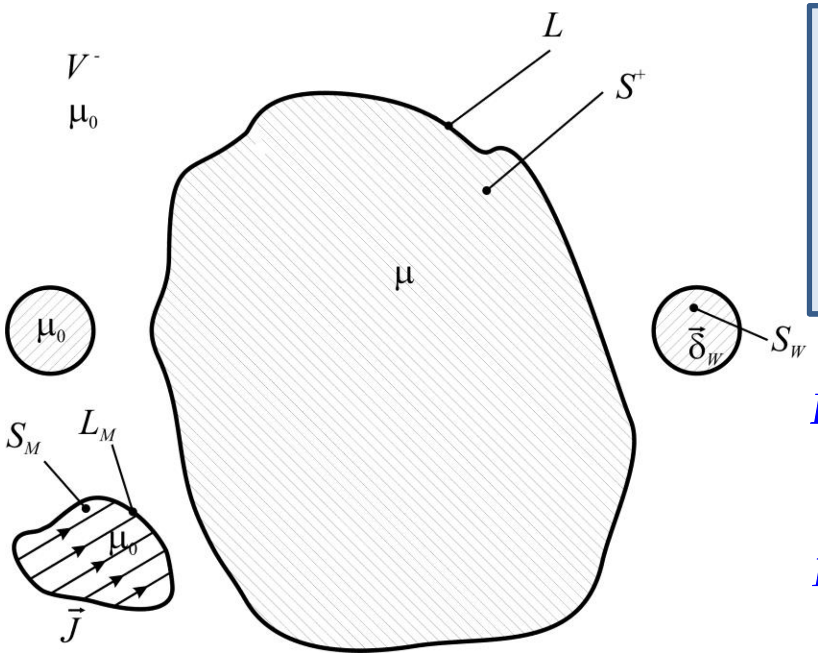
$$+2\mu_0\left[\sigma(Q)\vec H^{(B)}(Q)\vec n_Q - \frac{1}{S}\oint_S \sigma(P)\vec H^{(B)}(P)\vec n_P dS_P\right],\ Q\in S$$

$$\rho_M(Q) + \frac{1}{4\pi}\int_{V^+} \rho_M(M)\left[\frac{\vec r_{MQ}\,grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^3} - \frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec r_{MP}\,grad_P\mu(P)}{\mu(P)r_{MP}^3}dV_P\right]dV_M =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_S \sigma_M(M)\left[\frac{\vec r_{MQ}\,grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^3} - \frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec r_{MP}\,grad_P\mu(P)}{\mu(P)r_{MP}^3}dV_P + \frac{4\pi}{V^+}\right]dS_M -$$

$$-\mu_0\left[\frac{\vec H^{(B)}(Q)\,grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)} - \frac{1}{V^+}\int_{V^+}\frac{\vec H^{(B)}(P)\,grad_P\mu(P)}{\mu(P)}dV_P\right],\ Q\in V^+$$

МЕТОД ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ. ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА.



$$\begin{cases} \sigma(Q) - \dfrac{1}{\pi}\oint_L \sigma(M) K_1(M,Q)\, dL_M = \dfrac{1}{\pi}\int_S \rho(M) K_2(M,Q)\, dS_M + F^{\sigma}(Q), \quad Q \in L \\ \rho(Q) + \dfrac{1}{2\pi}\int_S \rho(M) K_3(M,Q)\, dS_M = -\dfrac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M) K_4(M,Q)\, dL_M - F^{\rho}(Q), \quad Q \in S \end{cases}$$

$$K_1(M,Q) = \lambda(Q)\frac{\vec{r}_{MQ}\vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L}\int_L \lambda(P)\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}\, dL_P$$

$$K_2(M,Q) = \lambda(Q)\frac{\vec{r}_{MQ}\vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L}\int_L \lambda(P)\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}\, dL_P - \frac{\pi}{L}$$

$$F^{\sigma}(Q) = 2\mu_0\left[\lambda(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)\vec{n}_Q - \frac{1}{L}\int_L \lambda(P)\vec{H}^{(B)}(P)\vec{n}_P\, dL_P\right]$$

$$K_4(M,Q) = \frac{\vec{r}_{MQ}\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S}\int_S \frac{\vec{r}_{MP}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{MP}^2}\, dS_P$$

$$K_3(M,Q) = \frac{\vec{r}_{MQ}\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S}\int_S \frac{\vec{r}_{MP}\, grad_P \mu(P)}{\mu(P) r_{MP}^2}\, dS_P + \frac{2\pi}{S}$$

$$F^{\rho}(Q) = \mu_0\left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q)\, grad_Q \mu(Q)}{\mu(Q)} - \frac{1}{S}\int_S \frac{\vec{H}^{(B)}(P)\, grad_P \mu(P)}{\mu(P)}\, dS_P\right]$$

Перетворення ядер інтегральних рівнянь для зменшення кількості складових, що містять *grad*μ(Q)

Тотожність Гріна в двомірному випадку $$\int_S \left(\varphi(P)\Delta\psi(P)+grad_P\varphi(P)grad_P\psi(P)\right)dS_P=\int_L \varphi(P)\frac{\partial\psi(P)}{\partial n}dL_P$$

Оберемо функції $$\psi(P)=\ln\frac{1}{r_{PM}} \qquad \varphi(P)=\ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}$$

Оскільки $$\Delta\left(\ln\frac{1}{r_{PM}}\right)=0 \quad grad_P\left(\frac{1}{r_{PM}}\right)=\frac{\vec{r}_{PM}}{r_{PM}^2} \quad grad_P\ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}=\frac{grad_P\mu(P)}{\mu(P)}$$

$M\in S$

$$\int_S\left(\frac{grad_P\mu(P)\vec{r}_{MP}}{\mu(P)r_{MP}^2}\right)dS_P=\int_L \ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}\cdot\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}dL_P-2\pi\ln\frac{\mu(M)}{\mu_0}$$

$M\in L$

$$\int_S\left(\frac{grad_P\mu(P)\vec{r}_{MP}}{\mu(P)r_{MP}^2}\right)dS_P=\int_L \ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}\cdot\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}dL_P-\pi\ln\frac{\mu(M)}{\mu_0}$$

$$\rho(Q)+\frac{1}{2\pi}\int_S\rho(M)K_3(M,Q)dS_M=-\frac{1}{2\pi}\int_L\sigma(M)K_4(M,Q)dL_M-F^{\rho}(Q),\ Q\in S$$

$$K_3(M,Q)=\frac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^2}-\frac{1}{S}\int_L\ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}dL_P+\frac{2\pi}{S}\ln\frac{\mu(M)}{\mu_0}$$

$$K_4(M,Q)=\frac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^2}-\frac{1}{S}\int_L\ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}dL_P+\frac{\pi}{S}\ln\frac{\mu(M)}{\mu_0}+\frac{2\pi}{S}$$

СПОСІБ РОЗРАХУНКУ $grad_Q \mu(Q)$

Нехай задана залежність $\mu(Q)=\mu(H(Q))$ тоді

$$grad_Q \mu(Q)=\frac{\partial\mu}{\partial H}\left[\frac{\partial H(r_Q,\alpha_Q)}{\partial r_Q}\vec{e}_r(Q)+\frac{\partial H(r_Q,\alpha_Q)}{r_Q\partial\alpha_Q}\vec{e}_\alpha(Q)\right],$$

де напруженість магнітного поля від джерел магнітного поля визначається виразом

$$\vec{H}(Q)=\frac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M)\frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2}dL_M+\frac{1}{2\pi}\int_S \rho(M)\frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2}dS_M+\frac{1}{2\pi}\oint_{L_M} \sigma_M(M)\frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2}dL_M+\frac{1}{2\pi}\int_{S_W}\frac{\vec{\delta}_W(M)\times\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2}dS_M.$$

Для розрахунку **часткових похідних**, що входять у співвідношення, врахуємо, що модуль напруженості магнітного поля через свої компоненти виражається як

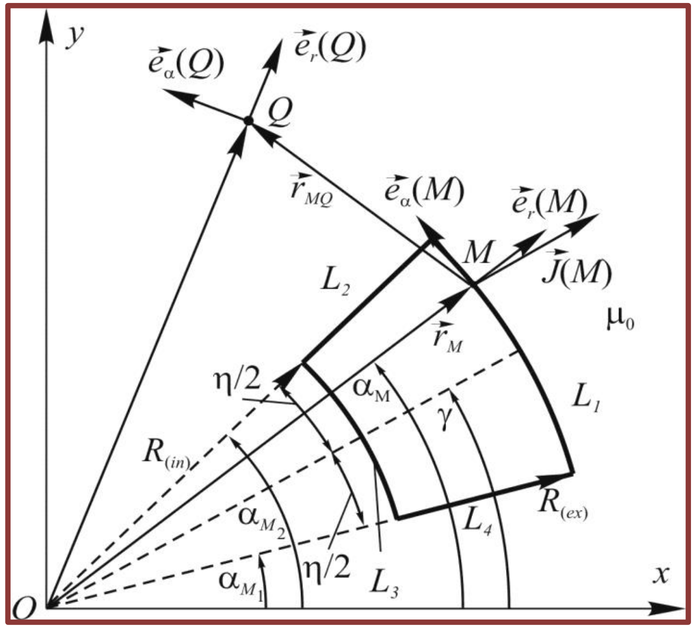
$$H(r_Q,\alpha_Q)=\sqrt{H_r^2(r_Q,\alpha_Q)+H_\alpha^2(r_Q,\alpha_Q)}$$

Таким чином, знаходимо:

$$\frac{\partial H(r_Q,\alpha_Q)}{\partial r_Q}=\frac{1}{H(r_Q,\alpha_Q)}\left(H_r(r_Q,\alpha_Q)\frac{\partial H_r(r_Q,\alpha_Q)}{\partial r_Q}+H_\alpha(r_Q,\alpha_Q)\frac{\partial H_\alpha(r_Q,\alpha_Q)}{\partial r_Q}\right)$$

$$\frac{\partial H(r_Q,\alpha_Q)}{r_Q\partial\alpha_Q}=\frac{1}{r_Q H(r_Q,\alpha_Q)}\left(H_r(r_Q,\alpha_Q)\frac{\partial H_r(r_Q,\alpha_Q)}{\partial\alpha_Q}+H_\alpha(r_Q,\alpha_Q)\frac{\partial H_\alpha(r_Q,\alpha_Q)}{\partial\alpha_Q}\right)$$

РОЗРАХУНОК ЧАСТКОВИХ ПОХІДНИХ НАПРУЖЕНОСТІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ВІД ПРОСТОГО ШАРУ МАГНІТНИХ ЗАРЯДІВ



Напруженість магнітного поля від простого шару магнітних зарядів (покомпонентно в циліндричній системі координат):

$$H_r^\sigma(Q)=\frac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M)\frac{r_Q-r_M\cos(\alpha_Q-\alpha_M)}{r_{MQ}^2}dL_M \qquad H_\alpha^\sigma(Q)=\frac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M)\frac{r_M\sin(\alpha_Q-\alpha_M)}{r_{MQ}^2}dL_M$$

Тоді, виконавши нескладні перетворення, знаходимо

$$\frac{\partial H_r^\sigma(r_Q,\alpha_Q)}{\partial r_Q}=\frac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M)P_{rr}(Q,M)dL_M \qquad \frac{\partial H_\alpha^\sigma(r_Q,\alpha_Q)}{\partial r_Q}=\frac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M)P_{\alpha r}(Q,M)dL_M$$

$$\frac{\partial H_r^\sigma(r_Q,\alpha_Q)}{\partial \alpha_Q}=\frac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M)P_{r\alpha}(Q,M)dL_M \qquad \frac{\partial H_\alpha^\sigma(r_Q,\alpha_Q)}{\partial \alpha_Q}=\frac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M)P_{\alpha\alpha}(Q,M)dL_M$$

$$P_{rr}(Q,M)=-\frac{r_Q^2-2r_M r_Q\cos(\alpha_Q-\alpha_M)+r_M^2\cos(2(\alpha_Q-\alpha_M))}{r_{MQ}^4}$$

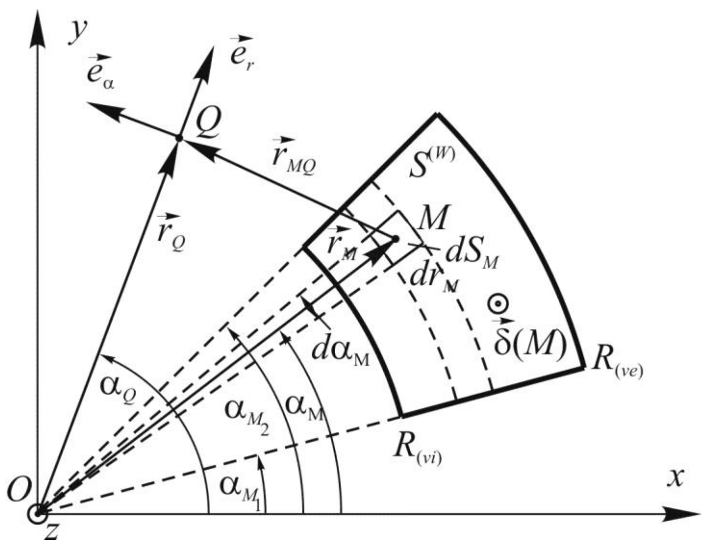
$$P_{\alpha r}(Q,M)=-\frac{2r_M\sin(\alpha_Q-\alpha_M)\left[r_Q-r_M\cos(\alpha_Q-\alpha_M)\right]}{r_{MQ}^4}$$

$$P_{r\alpha}(Q,M)=\frac{r_M\left(r_M^2-r_Q^2\right)\sin(\alpha_Q-\alpha_M)}{r_{MQ}^4}$$

$$P_{\alpha\alpha}(Q,M)=-\frac{r_M\left(2r_M r_Q-\left(r_M^2+r_Q^2\right)\cos(\alpha_Q-\alpha_M)\right)}{r_{MQ}^2}$$

Аналогічні вирази для розрахунку часткових похідних напруженості магнітного поля об'ємних магнітних зарядів, але інтегрування відбувається по поверхні *S*.

РОЗРАХУНОК ЧАСТКОВИХ ПОХІДНИХ НАПРУЖЕНОСТІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ВІД СТРУМІВ КОТУШОК



$$H_r^\delta(Q)=\frac{1}{2\pi}\int_{S_W}\delta_W(M)\frac{-r_M\sin(\alpha_Q-\alpha_M)}{r_{MQ}^2}dS_M \qquad H_\alpha^\delta(Q)=\frac{1}{2\pi}\int_{S_W}\delta_W(M)\frac{r_Q-r_M\cos(\alpha_Q-\alpha_M)}{r_{MQ}^2}dS_M$$

Після нескладних перетворень приходимо до виразу виду

$$\frac{\partial H_r^\delta(r_Q,\alpha_Q)}{\partial r_Q}=-\frac{1}{2\pi}\iint_{S_W}\delta_W(M)P_{\alpha r}(Q,M)dS_M \qquad \frac{\partial H_\alpha^\sigma(r_Q,\alpha_Q)}{\partial r_Q}=\frac{1}{2\pi}\iint_{S_W}\delta_W(M)P_{rr}(Q,M)dS_M$$

$$\frac{\partial H_r^\sigma(r_Q,\alpha_Q)}{\partial \alpha_Q}=-\frac{1}{2\pi}\iint_{S_W}\delta_W(M)P_{\alpha\alpha}(Q,M)dS_M \qquad \frac{\partial H_\alpha^\sigma(r_Q,\alpha_Q)}{\partial \alpha_Q}=\frac{1}{2\pi}\iint_{S_W}\delta_W(M)P_{r\alpha}(Q,M)dS_M$$

де

$$P_{rr}(Q,M)=-\frac{r_Q^2-2r_Mr_Q\cos(\alpha_Q-\alpha_M)+r_M^2\cos(2(\alpha_Q-\alpha_M))}{r_{MQ}^4}$$

$$P_{r\alpha}(Q,M)=\frac{r_M(r_M^2-r_Q^2)\sin(\alpha_Q-\alpha_M)}{r_{MQ}^4}$$

$$P_{\alpha r}(Q,M)=-\frac{2r_M\sin(\alpha_Q-\alpha_M)\left[r_Q-r_M\cos(\alpha_Q-\alpha_M)\right]}{r_{MQ}^4}$$

$$P_{\alpha\alpha}(Q,M)=-\frac{r_M\left(2r_Mr_Q-(r_M^2+r_Q^2)\cos(\alpha_Q-\alpha_M)\right)}{r_{MQ}^2}$$

ПЕРШИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Задаємо розподіл магнітної проникності в нелінійних феромагнітних елементах

Розв'язуємо рівняння для густини простого шару магнітних зарядів $\sigma_i^{(0)}$ у якому задаємо $\rho_j^{(0)}=0$, $j=1,2,..,N_S$

За знайденим розподілом знаходимо значення напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i

За знайденим розподілом напруженості магнітного поля з залежності $\mu=\mu(H)$ знаходимо значення магнітної проникності $\mu_i^{(0)}$ в елементарних площадках ΔS_i

Формуємо на k-му кроці розв'язання нелінійної задачі основну матрицю СЛАР і праву частину

Розв'язуємо повну СЛАР (прямим або ітераційним методом), тим самим знаходимо розподіл густини простого шару магнітних зарядів на границі феромагнітних тіл та розподіл густини об'ємних магнітних зарядів

За знайденим розподілом знаходимо значення модуля напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i

За знайденими значеннями напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних точок знаходимо за залежністю $\mu(H)$ значення магнітної проникності вказаних елементарних площадок

Перевіряємо виконання умови:

$$\varepsilon_\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S}\left(\mu_i^{(k)}-\mu_i^{(k-1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N_S}\left(\mu_i^{(k)}\right)^2}} \le \varepsilon_0$$

або

$$\varepsilon_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S}\left[\left(H_{ri}^{(k)}-H_{ri}^{(k-1)}\right)^2+\left(H_{\alpha i}^{(k)}-H_{\alpha i}^{(k-1)}\right)^2\right]}{\sum_{i=1}^{N_S}\left[\left(H_{ri}^{(k)}\right)^2+\left(H_{\alpha i}^{(k)}\right)^2\right]}} \le \varepsilon_0$$

ні

так

кінець

ДРУГИЙ (МОДИФІКОВАНИЙ) АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Задаємо розподіл магнітної проникності в нелінійних феромагнітних елементах μ

Розв'язуємо перше рівняння для визначення густини простого шару магнітних зарядів $\sigma_i^{(0)}$, $i=1,2,...,N_L$ на границі феромагнітних тіл, у якому задаємо $\rho_j^{(0)}=0$, $j=1,2,..,N_S$

За знайденим розподілом знаходимо значення напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i

За знайденим розподілом напруженості магнітного поля з залежності знаходимо значення магнітної проникності в елементарних площадках

Задаємо $\rho_j^{(0)}=0$, $j=1,2,...,N_D$

Формуємо на k-му кроці розв'язання нелінійної задачі матриці $K_1^{(k)}$, $K_2^{(k)}$ та праву частину $F^{\sigma(k)}$

Розв’язуємо СЛАР

- прямий метод
- ітераційний метод

За знайденим $\sigma_i^{(k+1)}$ та відомим $\rho_j^{(k)}$ розподілом знаходимо значення напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i, $i=1,2,...,N_S$

За знайденим у розподілом напруженості магнітного поля знаходимо проміжне значення магнітної проникності $\mu_i^{(k+1)}$ в елементарних площадках ΔS_i, $i=1,2,...,N_S$

Формуємо на k-му кроці розв'язання нелінійної задачі матриці $K_3^{(k)}$, $K_4^{(k)}$ та праву частину $F^{\rho(k)}$

Розв’язуємо СЛАР

- прямий метод
- ітераційний метод

За розподілом $\vec{\sigma}^{(k+1)}$ та $\vec{\rho}^{(k+1)}$ знаходимо значення модуля напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i, $i=1,2,...,N_S$

Перевіряємо виконання умови:

$$\varepsilon_H=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S}\left[\left(H_{ri}^{(k)}-H_{ri}^{(k-1)}\right)^2+\left(H_{\alpha i}^{(k)}-H_{\alpha i}^{(k-1)}\right)^2\right]}{\sum_{i=1}^{N_S}\left[\left(H_{ri}^{(k)}\right)^2+\left(H_{\alpha i}^{(k)}\right)^2\right]}}\le\varepsilon_0$$

або

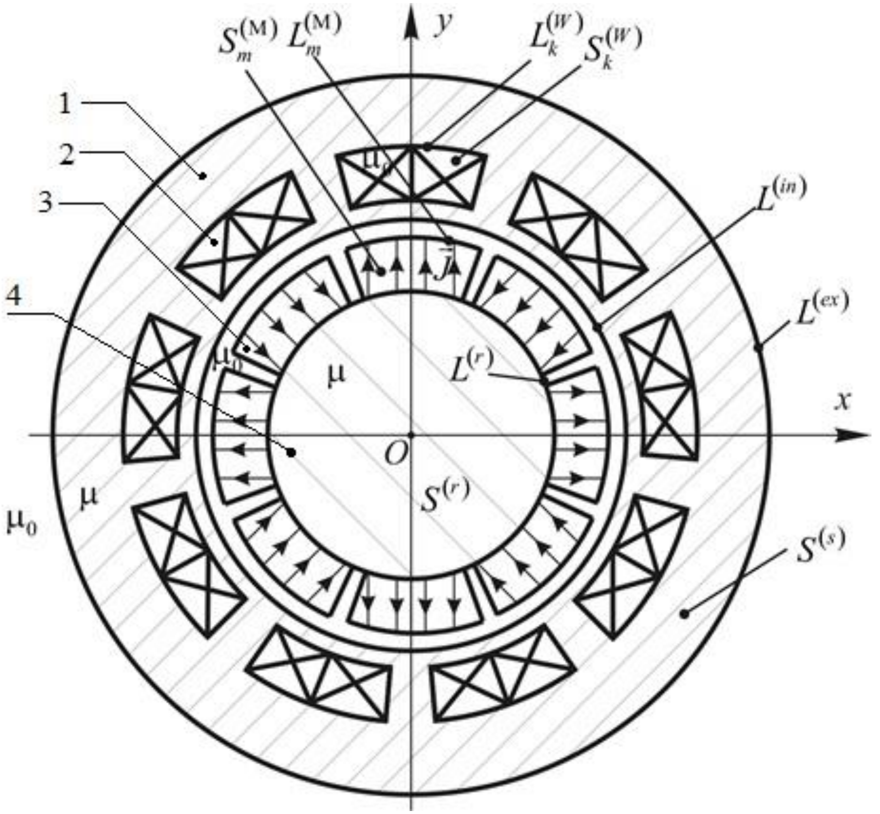
$$\varepsilon_\mu=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S}\left(\mu_i^{(k)}-\mu_i^{(k-1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{N_S}\left(\mu_i^{(k)}\right)^2}}\le\varepsilon_0$$

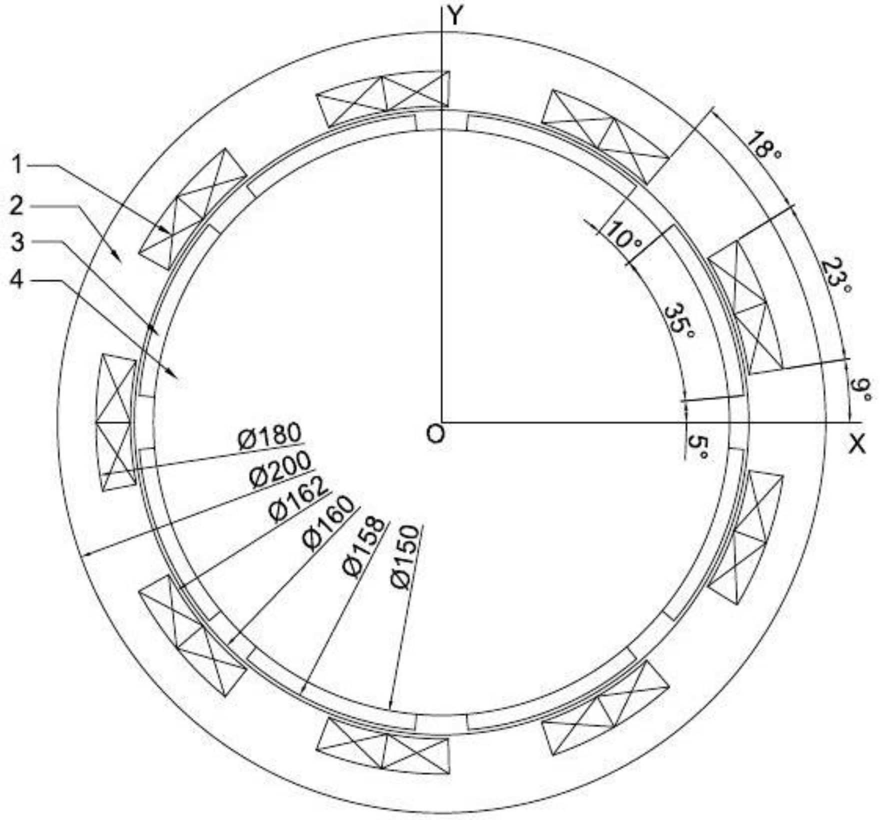
ні

так

кінець

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ У РОБОЧОМУ ЗАЗОРІ БЕЗКОЛЕКТОРНОГО ДВИГУНА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ





Переріз безконтактного електричного двигуна з висококоерцитивними постійними магнітами (початкове положення ротора): 1 – обмотка статора; 2 – статор; 3 – однорідні намагнічені постійні магніти; 4 – роторний вал.

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ЗА АЛГОРИТМОМ

Крок розв' язання нелінійної задачі	а) ε_{μ}, %	а) ε_{H}, %	б) ε_{μ}, %	б) ε_{H}, %	в) Кількість ітерацій	в) ε_{μ}, %	в) ε_{H}, %	г) Кількість ітерацій	г) ε_{μ}, %	г) ε_{H}, %
1	23,2	79,9	23,2	79,9	437	23,2	79,9	192	23,5	80,0
2	16,1	60,2	16,1	60,2	398	16,1	60,2	124	17,0	57,9
3	15,1	32,7	15,1	32,7	421	15,1	32,7	94	17,1	31,3
4	8,9	13,5	8,9	13,5	316	8,9	13,5	52	13,2	13,1
5	16,8	6,2	16,8	6,2	281	16,8	6,1	32	15,7	5,7
6	5,7	3,7	5,7	3,7	253	5,8	3,7	17	6,6	2,5
7	9,9	2,4	9,9	2,4	211	10,3	2,3	7	6,1	1,2
8	9,4	1,5	9,4	1,5	186	9,5	1,53	6	3,0	0,7
9	12,1	1,5	12,1	1,5	174	12,1	1,54	-	-	-
10	10,7	1,4	10,7	1,4	162	10,7	1,48	-	-	-
11	10,1	1,1	9,06	1,08	124	8,8	1,1	-	-	-
12	10,1	1,1	10,1	1,1	134	10,1	1,2	-	-	-
13	9,0	0,9	9,0	0,9	130	9,13	0,99	-	-	-
Час розрахунків, с	15067		15176		1303			948		

У таблиці надано результати розрахунків, що реалізовані за першим алгоритмом розв'язку системи інтегральних рівнянь:

а) – розв'язання прямим методом (метод Гауса) СЛАР, до якої зводиться не перетворена система інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_M(Q)-\dfrac{\lambda(Q)}{2\pi}\oint_S \sigma_M(M)\dfrac{\vec{r}_{MQ}\vec{n}_Q}{r_{MQ}^3}dS_M=\dfrac{\lambda(Q)}{2\pi}\int_{V^+}\rho_M(M)\dfrac{\vec{r}_{MQ}\vec{n}_Q}{r_{MQ}^3}dV_M+ \\ +2\mu_0\lambda(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)\vec{n}_Q\ ,\ Q\in S \\ \rho_M(Q)+\dfrac{1}{4\pi}\int_{V^+}\rho_M(M)\dfrac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^3}dV_M= \\ =-\dfrac{1}{4\pi}\oint_S \sigma_M(M)\dfrac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^3}dS_M-\dfrac{\mu_0\vec{H}^{(B)}(Q)grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)}\ ,Q\in V^+ \end{cases} \quad (1)$$

б) – розв'язання прямим методом (метод Гауса) СЛАР, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma(Q)-\dfrac{1}{\pi}\oint_L \sigma(M)K_1(M,Q)dL_M=\dfrac{1}{\pi}\int_S \rho(M)K_2(M,Q)dS_M+F^{\sigma}(Q),\ Q\in L \\ \rho(Q)+\dfrac{1}{2\pi}\int_S \rho(M)K_3(M,Q)dS_M=-\dfrac{1}{2\pi}\oint_L \sigma(M)K_4(M,Q)dL_M-F^{\rho}(Q),\ Q\in S \end{cases} \quad (2)$$

з ядрами:

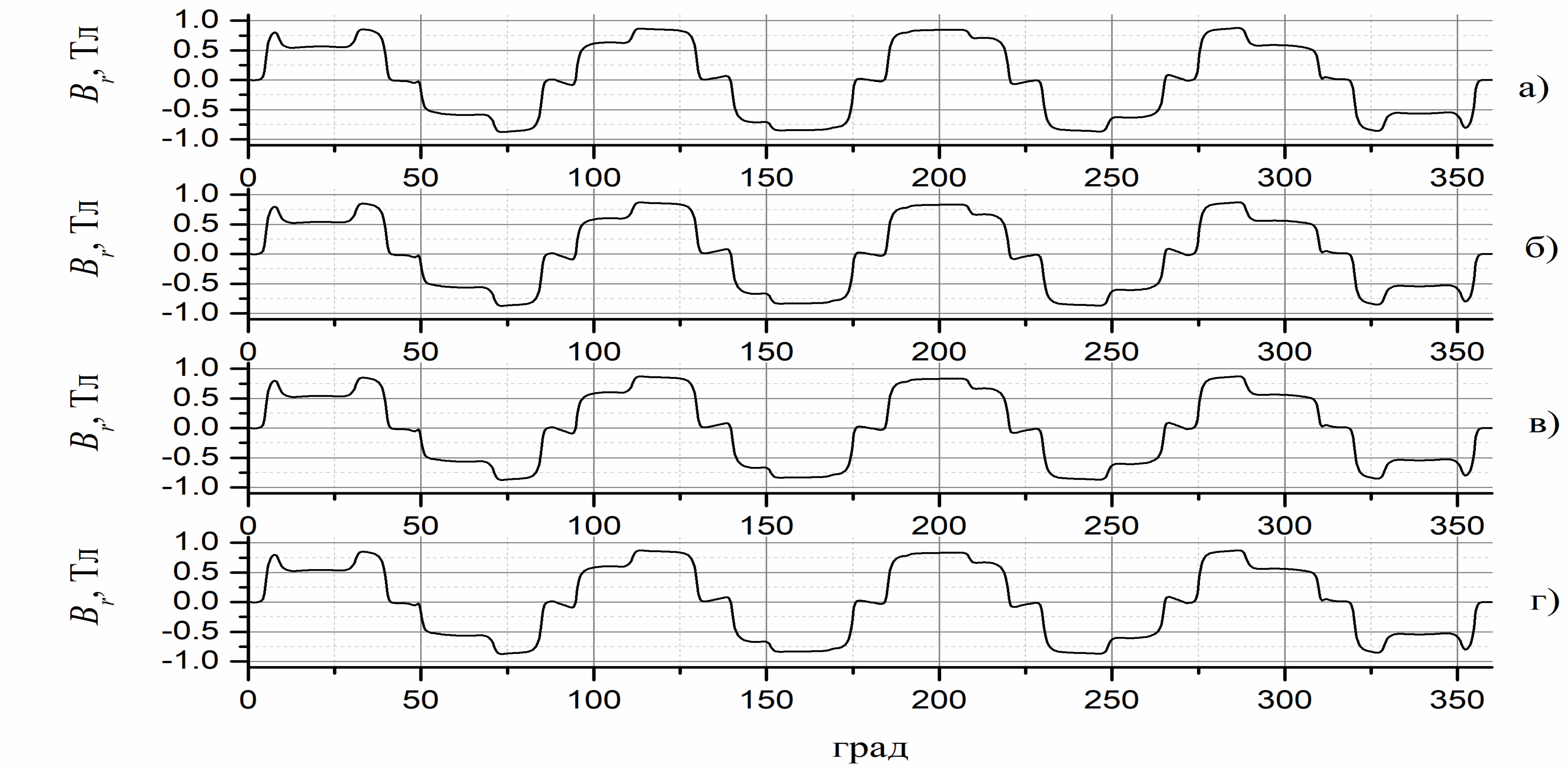
$$K_3(M,Q)=\frac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^2}-\frac{1}{S}\int_L ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}dL_P+\frac{2\pi}{S}ln\frac{\mu(M)}{\mu_0}$$

$$K_4(M,Q)=\frac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^2}-\frac{1}{S}\int_L \ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}dL_P+\frac{\pi}{S}\ln\frac{\mu(M)}{\mu_0}+\frac{2\pi}{S}$$

в) – розв'язання методом простої ітерації СЛАР, до якої зводиться не перетворена система інтегральних рівнянь (1);

г) – розв'язання методом простої ітерації, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь (2).

РОЗПОДІЛ r-КОМПОНЕНТИ ІНДУКЦІЇ МАГНІТНОГО ПОЛЯ У РОБОЧОМУ ЗАЗОРІ ЕЛЕКТРИЧНОГО ДВИГУНА



а) – розв’язання прямим методом (метод Гауса) СЛАР, до якої зводиться не перетворена система інтегральних рівнянь;
б) – розв’язання прямим методом (метод Гауса) СЛАР, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь;
в) – розв’язання методом простої ітерації СЛАР, до якої зводиться не перетворена система інтегральних рівнянь (1);
г) – розв’язання методом простої ітерації, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь (2).

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ЗА МОДИФІКОВАНИМ АЛГОРИТМОМ

Крок розв'язання нелінійної задачі	а)		б)		в)				г)			
	ε_μ, %	ε_H, %	ε_μ, %	ε_H, %	Кількість ітерацій	Кількість ітерацій	ε_μ, %	ε_H, %	Кількість ітерацій	Кількість ітерацій	ε_μ, %	ε_H, %
1	35	63	36	63	41	7	37	61	41	7	37	61
2	18	49	18	49	39	6	22	48	39	6	36	29
3	30	29	30	29	37	6	36	29	37	6	36	29
4	19	14	19	14	29	6	26	14	29	6	26	14
5	17	6,5	17	6,5	21	6	27	7	21	6	27	7
6	13	3,4	13	3,4	17	5	21	3,7	17	5	21	3,7
7	9,3	2,3	9,3	2,3	13	4	11	2,1	13	4	11	2,1
8	7,2	1,7	7,2	1,7	8	4	7,3	1,3	8	4	7,3	1,3
9	6,4	1,3	6,4	1,3	3	4	3,9	0,5	3	4	3,9	0,5
10	6,9	0,9	6,9	0,9								
Час розрахунків, с	6526		6655		1187				854			

в) – розв'язання методом простої ітерації СЛАР, до якої зводиться не перетворена система інтегральних рівнянь (1);

г) – розв'язання методом простої ітерації, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь (2).

У таблиці надано результати розрахунків, що реалізовані за другим (модифікованим) алгоритмом розв'язку системи інтегральних рівнянь:

а) – розв'язання прямим методом (метод Гауса) СЛАР, до якої зводиться не перетворена система інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma_M(Q)-\dfrac{\lambda(Q)}{2\pi}\oint\limits_S \sigma_M(M)\dfrac{\vec{r}_{MQ}\vec{n}_Q}{r_{MQ}^3}dS_M=\dfrac{\lambda(Q)}{2\pi}\int\limits_{V^+}\rho_M(M)\dfrac{\vec{r}_{MQ}\vec{n}_Q}{r_{MQ}^3}dV_M+ \\ +2\mu_0\lambda(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)\vec{n}_Q,\ Q\in S \\ \rho_M(Q)+\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{V^+}\rho_M(M)\dfrac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^3}dV_M= \\ =-\dfrac{1}{4\pi}\oint\limits_S \sigma_M(M)\dfrac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^3}dS_M-\dfrac{\mu_0\vec{H}^{(B)}(Q)grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)},\ Q\in V^+ \end{cases} \quad (1)$$

б) – розв'язання прямим методом (метод Гауса) СЛАР, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma(Q)-\dfrac{1}{\pi}\oint\limits_L \sigma(M)K_1(M,Q)dL_M=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_S \rho(M)K_2(M,Q)dS_M+F^{\sigma}(Q),\ Q\in L \\ \rho(Q)+\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_S \rho(M)K_3(M,Q)dS_M=-\dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_L \sigma(M)K_4(M,Q)dL_M-F^{\rho}(Q),\ Q\in S \end{cases} \quad (2)$$

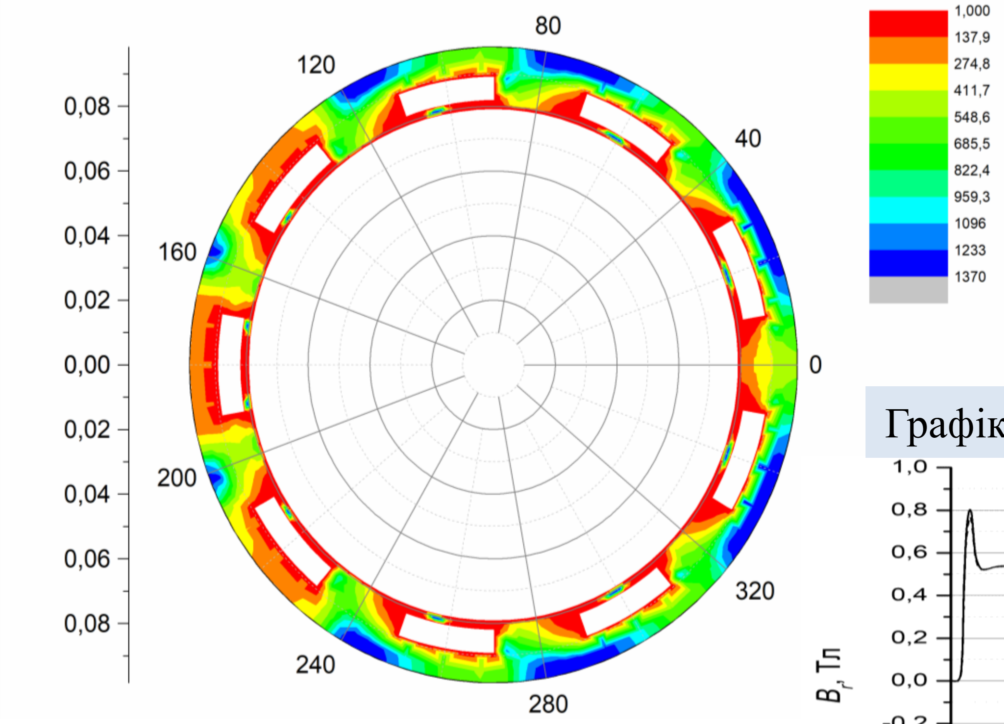
з ядрами:

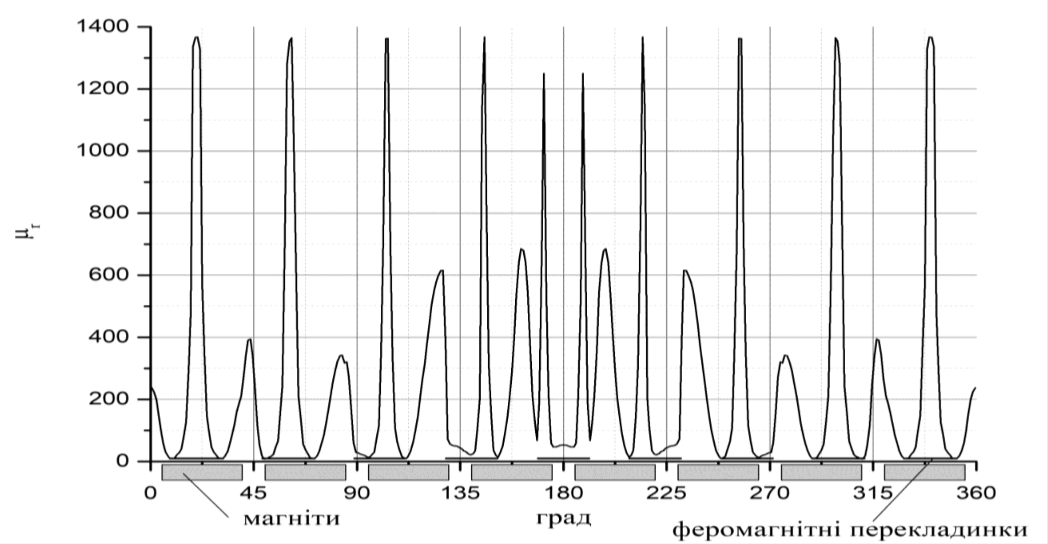
$$K_3(M,Q)=\frac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^2}-\frac{1}{S}\int\limits_L ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}dL_P+\frac{2\pi}{S}ln\frac{\mu(M)}{\mu_0}$$

$$K_4(M,Q)=\frac{\vec{r}_{MQ}grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)r_{MQ}^2}-\frac{1}{S}\int\limits_L \ln\frac{\mu(P)}{\mu_0}\frac{\vec{r}_{MP}\vec{n}_P}{r_{MP}^2}dL_P+\frac{\pi}{S}\ln\frac{\mu(M)}{\mu_0}+\frac{2\pi}{S}$$

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНОГО ПОЛЯ У РОБОЧОМУ ЗАЗОРІ БЕЗКОЛЕКТОРНОГО ДВИГУНА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

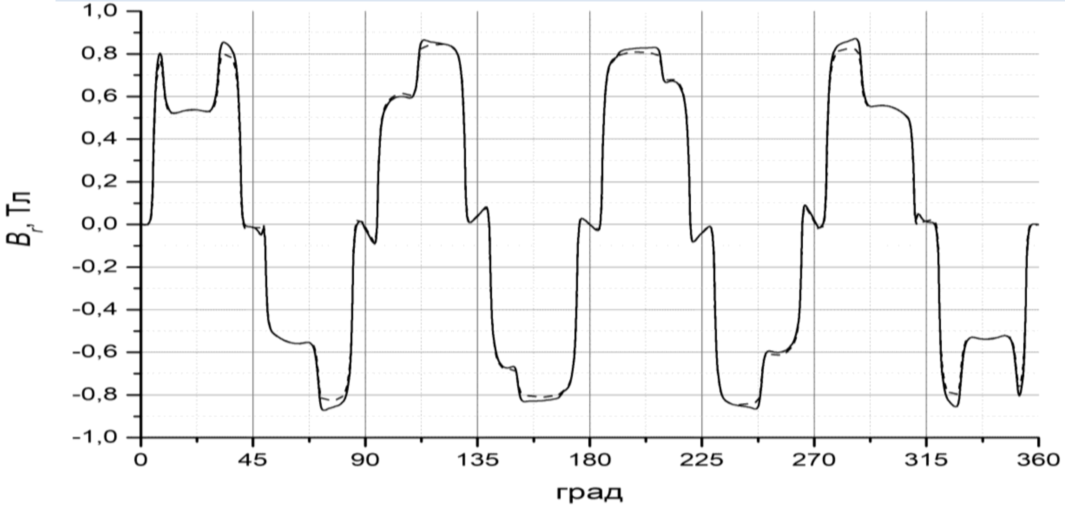
Розподіл відносної магнітної проникності у перерізі статора електричного двигуна





Графік залежності відносної магнітної проникності вдовж кола, що проходить скрізь перекладинки, з радіусом $r = 80,5$ мм

Графіки розподілу індукції магнітного поля у робочому зазорі електричного двигуна:



- для випадку, коли всюди у феромагнітних елементах враховувалась залежність $\mu(H)$ (суцільна лінія);
- для випадку, коли нелінійні властивості феромагнітного матеріалу враховувалось тільки у перекладинках (пунктирна лінія)

ВИСНОВКИ

Отримав подальший розвиток метод інтегральних рівнянь для розрахунку характеристик магнітного поля в нелінійних середовищах в напрямі зменшення кількості складових у ядрах інтегральних рівнянь, які містять функцію градієнту від магнітної проникності, та подальшого явного виразу цієї функції через густини джерел магнітного поля, що дає змогу замінити процедуру чисельного диференціювання при апроксимації функції градієнту від магнітної проникності на процедуру чисельного інтегрування, що має суттєве значення для підвищення точності розрахунку ядер інтегральних рівнянь в методі інтегральних рівнянь.