

Інститут електродинаміки
Національна академія наук України

Інститут електродинаміки
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Ликтей Вікторія Володимирівна

УДК 621.3.013.22

ДИСЕРТАЦІЯ

УДОСКОНАЛЕННЯ СПОСОБУ ФОРМУВАННЯ ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ В МЕТОДІ ВТОРИННИХ ДЖЕРЕЛ ДЛЯ АНАЛІЗУ МАГНІТНИХ
ПОЛІВ В НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

05.09.05 «Теоретична електротехніка»

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело


_____ В.В. Ликтей

Науковий керівник Кондратенко Ігор Петрович, доктор технічних наук,
член-кореспондент НАН України

Київ – 2023

АНОТАЦІЯ

Луктей В.В. Удосконалення способу формування ядер інтегральних рівнянь в методі вторинних джерел для аналізу магнітних полів в нелінійних середовищах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.09.05 «Теоретична електротехніка». – Інститут електродинаміки Національної академії наук України, Київ, 2023.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню актуального наукового завдання, що полягає у подальшому розвитку методу вторинних джерел для розрахунку характеристик магнітного поля в нелінійних середовищах в напрямі зменшення кількості складових у ядрах інтегральних рівнянь, які містять функцію градієнту від магнітної проникності, та подальшого явного виразу цієї функції через густину джерел магнітного поля.

Основні завдання роботи полягають в обґрунтуванні необхідності вдосконалення існуючих методів розрахунку магнітних полів у нелінійних середовищах із використанням інтегральних рівнянь для густин вторинних джерел магнітного поля; удосконалення методу вторинних джерел для розрахунку магнітного поля у магнітних системах із нелійними феромагнітними елементами; розробці математичної моделі та відповідного розрахункового методу для аналізу магнітного поля у безколекторному двигуні постійного струму з неявнополосним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та явнополосним ротором з постійними магнітами; виявлення закономірності розподілу магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму та визначити умови за яких тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором входять у стан магнітного насичення, що суттєво знижує шунтування магнітного потоку струмів статора і постійних магнітів цими перекладками.

Робота складається зі вступу, 3 розділів, загальних висновків, списку

використаних літературних джерел та додатків.

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, розкрито сутність і стан науково-технічної проблеми, що досліджується, наведено обґрунтування доцільності проведення досліджень, відображено зв'язок роботи з науковими програмами та планами НДР Інституту електродинаміки НАН України та Національного університету біоресурсів і природокористування України, сформульовано мету і завдання досліджень, наукову новизну і практичне значення отриманих результатів, зазначено особистий внесок здобувача, наведено апробації роботи та публікації її результатів у наукових виданнях.

У *першому* розділі проведено аналіз літературних джерел, що виявив різноманітність електротехнічних і електроенергетичних пристроїв, що вимагає всебічного дослідження їх передбачуваних техніко-економічних характеристик і властивостей ще до моменту їх виготовлення. Це в свою чергу передбачає на першому етапі математичне моделювання основних характеристик розроблюваних пристроїв з урахуванням як геометричних параметрів так і фізичних властивостей використовуваних при їх проектуванні матеріалів для створення сучасної конкурентоспроможної продукції.

Одним із найважливіших і відповідальних етапів процедури математичного моделювання параметрів електротехнічних пристроїв є розрахунок характеристик створюваних ними електромагнітних полів. Для аналізу електромагнітних процесів в електромеханічних пристроях, таких як електричні машини, тягові електромагніти або трансформатори, на теперішній час пропонуються різні методи розрахунку електромагнітних полів з урахуванням реальних електрофізичних властивостей матеріалів, які різняться за постановкою, складністю чисельної реалізації, можливістю повного урахування реальної геометрії системи та реальних магнітних властивостей компонентів. Серед них – метод скінчених різниць, метод скінчених елементів, метод інтегральних рівнянь та інші методи. Незважаючи на великі можливості використовуваної в подібних розрахунках обчислювальної техніки, для більшості методів моделювання електромагнітних процесів зберігається необхідність підвищення точності, зниження трудомісткості і

скорочення часу рахунку.

Багато електротехнічних пристроїв (електричні машини та апарати, елементи автоматики й обчислювальної техніки) містять феромагнітні елементи. Номінальні режими роботи таких пристроїв реалізуються зазвичай при значеннях магнітної індукції, які не призводять до значного насичення магнітом'яких матеріалів. У цей же час у деяких областях (наприклад, кутові зони, тонкі феромагнітні перекладки) значення магнітної індукції можуть перевищувати допустимі, що вимагає врахування нелінійної залежності $B(H)$ при розрахунку магнітного поля в таких пристроях.

На основі методу вторинних джерел крайову задачу розрахунку характеристик магнітного поля з урахуванням нелінійності магнітної характеристики сталі може бути зведено до системи інтегральних рівнянь, наприклад, для фіктивних магнітних зарядів, розташованих по границі та об'єму феромагнітних тіл, що дозволяє суттєво звузити область пошуку невідомих. При цьому у ядра інтегральних рівнянь входить функція $grad \mu$, розрахунок якої ускладнюється при чисельному розв'язку цих рівнянь. Перевага методу вторинних джерел у цьому випадку полягає в тому, що цю функцію можна явно виразити через густину джерел магнітного поля. Це з одного боку суттєво спрощує формування ядер інтегрального рівняння, а з іншого, підвищує точність її розрахунку при переході до скінченновимірною аналогу при чисельному розв'язку системи інтегральних рівнянь.

У роботі отримав подальший розвиток метод інтегральних рівнянь для розрахунку характеристик магнітного поля в нелінійних середовищах в напрямі зменшення кількості складових у ядрах інтегральних рівнянь, які містять функцію градієнту від магнітної проникності, та подальшого явного виразу цієї функції через густину джерел магнітного поля, що дає змогу процедуру чисельного диференціювання при апроксимації функції градієнту від магнітної проникності замінити процедурою чисельного інтегрування, що має суттєве значення для підвищення точності розрахунку характеристик магнітного поля в нелінійному середовищі.

У другому розділі, на основі методу вторинних джерел, крайова задача розрахунку характеристик магнітного поля у безколекторному двигуні постійного струму з урахуванням нелінійних магнітних властивостей матеріалу зведена до системи інтегральних рівнянь для фіктивних магнітних зарядів, розташованих по границі та об'єму феромагнітних тіл, що дозволяє суттєво звузити область пошуку невідомих.

Вдосконалено математичну модель розрахунку компонент магнітного поля у безколекторному двигуні постійного струму з урахуванням нелінійних властивостей феромагнітних матеріалів шляхом спрощення виду ядер інтегральних рівнянь за рахунок зменшення кількості складових, що містять $grad_{\varrho}\mu(Q)$, що дозволяє спростити подальший чисельний розв'язок цих рівнянь.

Розроблено методику розрахунку функції $grad_{\varrho}\mu(Q)$ з урахуванням явного представлення напруженості магнітного поля через густини магнітних зарядів, що дозволило процес її апроксимації скінченновимірним аналогом виконати інтегруванням за джерелами поля, що дозволило зменшити похибку її апроксимації на відміну від процедури чисельного диференціювання безпосередньо функції $\mu(Q)$.

На підставі безпосереднього інтегрування виразів для компонент напруженості магнітного поля, що створюється системою струмів, які розташовані в пазах у формі криволінійної трапеції, виведено аналітичні формули для їх визначення, що дозволяє усунути похибку чисельного розрахунку поля струмів обмоток статора безколекторного двигуна постійного струму.

Розв'язано крайову задачу для скалярного магнітного потенціалу розрахунку магнітного поля постійного однорідно-намагніченого магніту циліндричної форми в площині феромагнетика. Виведено аналітичний вираз для магнітного потоку, що створюється магнітною системою, який дозволив встановити границі зміни внутрішнього радіусу феромагнітної вставки, на поверхні якої розміщені постійні магніти, з умови заданого відхилення магнітного потоку від максимального значення.

У *третьому* розроблено методику розрахунку характеристик магнітного поля в електротехнічних пристроях з тонкими перекладками або насиченими в магнітному відношенні областями, яка дозволяє виявити області з явно вираженою насиченістю феромагнітних елементів, вважати їх магнітну проникність як функцію $\mu(H)$, а для іншої частини феромагнітних елементів задати постійну магнітну проникність. Це дозволяє складну задачу розрахунку характеристик магнітного поля в електротехнічному пристрої з феромагнітними елементами з нелінійною магнітною характеристикою звести до задачі розрахунку магнітного поля в кусково-однорідному середовищі з постійними магнітними проникностями для одних областей, та враховувати нелінійності в окремих локалізованих областях. Вирішення першої задачі зводиться до розв'язання одного інтегрального рівняння для густини простого шару магнітних зарядів, розподілених тільки по границі феромагнітних тіл з різною магнітною проникністю, для другої застосовуються два інтегральних рівняння: для густини простого шару електричних зарядів на границі феромагнітних тіл та для густини об'ємних електричних зарядів у перерізі феромагнітних тіл. Це істотно зменшує область пошуку розв'язку на відміну від методу скінченних різниць або методу скінченних елементів, де розв'язок шукається, власне кажучи, в усьому необмеженому просторі.

Доведено, що при номінальному режимі роботи безколекторного двигуна постійного струму феромагнітний матеріал, з якого виготовлено перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором, входять у стан магнітного насичення, що суттєво знижує шунтування магнітного потоку струмів статора і постійних магнітів цими перекладками, магнітна проникливість матеріалу яких наближається до значення магнітної проникливості повітря.

Новизна роботи полягає в наступному:

Отримав подальший розвиток метод інтегральних рівнянь для розрахунку характеристик магнітного поля в нелінійних середовищах в напрямі зменшення кількості складових у ядрах інтегральних рівнянь, які містять функцію градієнту від магнітної проникності, та подальшого явного виразу цієї функції через густини

джерел магнітного поля, що дає змогу замінити процедуру чисельного диференціювання при апроксимації функції градієнту від магнітної проникності на процедуру чисельного інтегрування, що має суттєве значення для підвищення точності розрахунку ядер інтегральних рівнянь в методі інтегральних рівнянь.

Розроблено *нову* математичну модель і відповідний розрахунковий метод для чисельного розрахунку магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму з неявнополюсним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та явнополюсним ротором з постійними магнітами, що дозволяють враховувати нелінійні властивості феромагнітних елементів магнітної системи двигуна.

Доведено, що при номінальному режимі роботи безколекторного двигуна постійного струму феромагнітний матеріал, з якого виготовлено перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором, входять у стан близький до магнітного насичення з неоднорідним розподілом магнітної проникності, що суттєво знижує шунтування магнітного потоку струмів статора і постійних магнітів цими перекладками.

Практичне значення для електротехнічної галузі має запропонований алгоритм розрахунку магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму з неявнополюсним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та явнополюсним ротором з постійними магнітами, що дозволяє враховувати нелінійні властивості феромагнітних елементів магнітної системи двигуна. На основі нього написано програму мовою *FORTRAN*, яка дозволяє за відомими вхідними даними (геометричні параметри системи, електрофізичні параметри матеріалів, характеристики постійних магнітів, струму у обмотках) розрахувати магнітне поле у робочому зазорі електричного двигуна та провести оптимізацію за обраними критеріями.

Ключові слова: магнітне поле, нелінійне середовище, метод вторинних джерел, безколекторний двигун постійного струму.

Список публікацій здобувача

1. Жильцов А. В., Ликтей. В. В. Расчёт магнитного потока от постоянного магнита в форме цилиндра при наличии ферромагнетиков. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2014. № 194. С. 122–132. (Особистий внесок – розв'язано задачу розрахунку магнітного поля від однорідно-намагніченого постійного магніту, що розташований між двома ферромагнітними тілами циліндричної форми).

2. Жильцов А. В., Ликтей. В. В. Розрахунок магнітного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2014. № 4. С. 59–70. (Особистий внесок – з використанням методу вторинних джерел розроблено дво- та тривимірну математичні моделі для розрахунку характеристик магнітного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики).

3. Жильцов А. В., Ликтей. В. В. Розрахунок магнітного поля струмів обмотки статора вентильного двигуна. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2015. № 209 (2). С. 174–180. (Особистий внесок – виведено аналітичні формули для розрахунку плоскопаралельного стаціонарного магнітного поля струмів, розміщених у пазах криволінійної трапецеїдальної форми статора вентильного двигуна).

4. Жильцов А. В., Ликтей В. В. Моделирование магнитного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2016. № 256. С. 178–186. (Особистий внесок – удосконалено математичну модель розрахунку характеристик магнітного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики шляхом модифікації ядер інтегральних рівнянь в напрямі зменшення складових, що містять функцію $grad\mu$).

5. Zhylytsov A., Lyktei V. Magnetic field calculation of brushless direct current motor with smooth stator by secondary sources method. *Technical Electrodynamics*.

2018. № 5. Рр. 7–10. (Особистий внесок – розроблено математичну модель вентиляльного двигуна з висококоерцитивними постійними магнітами, в основі якої лежить метод вторинних джерел, що дав змогу завдання визначення розподілу магнітної проникності у феромагнітних елементах двигуна звести до розв'язання системи інтегральних рівнянь для густини простого шару й густини об'ємних магнітних зарядів. Запропоновано ітераційний метод знаходження магнітної проникності з урахуванням її нелінійної залежності).

6. Zhylytsov, A., Kondratenko, I., Lyktei, V., Usenko, S. The magnetic field calculation in electromechanical systems with saturated ferromagnetic structural elements. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2020. 97(1). pp. 69–72. (Особистий внесок – розроблено метод розрахунку характеристик магнітного поля в електромеханічних системах з тонкими перекладками на основі зведення початково-крайової задачі для рівнянь Максвелла до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь з подальшим її чисельним розв'язуванням).

7. Жильцов А.В., Ликтей В.В. Крайова задача для тривимірного магнітного поля з урахуванням неоднорідності магнітних властивостей середовища. *Проблеми енергоресурсозбереження в електротехнічних системах*. Наука, освіта і практика: наукове видання. Кременчук, 14-16 травня 2014. Вип. 1/2014 (2). С. 124-126.

8. Жильцов А.В., Ликтей В.В. Розрахунок магнітного поля у вентиляльному електродвигуні з урахуванням неоднорідності магнітних властивостей середовища. *Відновлювальна енергетика, новітні автоматизовані технології в біотехнічних системах АПК*: тези доповідей II Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених. Київ, 16-17 жовтня 2014. С. 120–121.

9. Zhylytsov A., Lyktei V. Calculation of the magnetic field winding on the stator the brushless DC electricmotor. *Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування*. Київ, 14-18 грудня 2015. С. 113–114.

10. Жильцов А.В., Ликтей В.В. Магнітне поле струмів обмотки статора вентиляльного електродвигуна із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики. *Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування*. Київ, 10-14 травня 2016. С. 69–70.

11. Жильцов А.В., Ликтей В.В. Вдосконалення математичної моделі розрахунку характеристик магнітного поля у вентильному електродвигуні з закритими пазами з урахуванням нелінійного характеру магнітної проникливості. *Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування*. Київ, 14-18 листопада 2016. С. 102–104.

12. Zhylytsov A., Lyktei V. Calculation of the magnets` field in anelectric motor with a smooth stator. *Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування*. Київ, 23-27 травня 2018. С. 15–16.

ABSTRACT

Lyktei V.V. Improvement of the method of forming the kernels of integral equations in the method of secondary sources for the analysis of magnetic fields in nonlinear media. – Qualification scientific work with the manuscript copyright.

The thesis for a degree of candidate of technical sciences by speciality 05.09.05 «Theoretical electrical engineering». – Institute of electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2023.

The dissertation is dedicated to the solution of an actual scientific task, which consists in the further development of the method of secondary sources for calculating the characteristics of the magnetic field in nonlinear media in the direction of reducing the number of components in the kernels of integral equations that contain the function of the gradient from the magnetic permeability, and the further explicit expression of this function through the density magnetic field sources.

The main tasks of the work are to justify the need to improve the existing methods of calculating magnetic fields in nonlinear environments using integral equations for the densities of secondary sources of the magnetic field; improvement of the method of secondary sources for calculating the magnetic field in magnetic systems with non-linear ferromagnetic elements; development of a mathematical model and a corresponding calculation method for the analysis of the magnetic field in a collectorless DC motor with an implicit-pole smooth stator, containing thin ferromagnetic bridges between the stator winding and the gap between the stator and an explicit-pole rotor with permanent magnets; detection of the regularity of the distribution of the magnetic field in the brushless DC motor and to determine the conditions under which the thin ferromagnetic bridges between the stator winding and the gap between the stator and the rotor enter a state of magnetic saturation, which significantly reduces the shunting of the magnetic flux of the stator and permanent magnet currents by these bridges.

The work consists of an introduction, 3 sections, general conclusions, a list of used literary sources, and appendices.

The introduction substantiates the relevance of the topic of the dissertation, discloses the essence and state of the scientific and technical problem under investigation, provides justification for the expediency of conducting research, reflects the connection of the work with the scientific programs and plans of the National Academy of Sciences of the Institute of Electrodynamics of the National Academy of Sciences of Ukraine and National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine), formulates the purpose and tasks of research, scientific novelty and the practical significance of the obtained results, the personal contribution of the recipient is indicated, approvals of the work and publication of its results in scientific publications are given.

In the *first* section, an analysis of literary sources was carried out, which revealed the variety of electrotechnical and electric power devices, which requires a comprehensive study of their expected technical and economic characteristics and properties even before the moment of their manufacture. This, in turn, involves, at the first stage, mathematical modeling of the main characteristics of the devices being developed, taking into account both the geometric parameters and the physical properties of the materials used in their design in order to create modern competitive products.

One of the most important and responsible stages of the procedure of mathematical modeling of the parameters of electrotechnical devices is the calculation of the characteristics of the electromagnetic fields created by them. For the analysis of electromagnetic processes in electromechanical devices, such as electric machines, traction electromagnets or transformers, various methods of calculating electromagnetic fields are currently offered, taking into account the real electrophysical properties of materials, which differ in formulation, complexity of numerical implementation, the possibility of fully taking into account the real geometry of the system and real magnetic properties of components. Among them are the method of finite differences, the method of finite elements, the method of integral equations and other methods. Despite the great capabilities of computer technology used in such calculations, for most methods of modeling electromagnetic processes there is still a need to increase accuracy, reduce labor intensity, and reduce calculation time.

Many electrotechnical devices (electrical machines and devices, elements of automation and computer equipment) contain ferromagnetic elements. The nominal modes of operation of such devices are usually implemented at values of magnetic induction that do not lead to significant saturation of magnetically soft materials. At the same time, in some areas (for example, corner zones, thin ferromagnetic bridges), the values of magnetic induction may exceed the permissible values, which requires taking into account the nonlinear dependence of $B(H)$ when calculating the magnetic field in such devices.

Based on the method of secondary sources, the marginal problem of calculating the characteristics of the magnetic field, taking into account the nonlinearity of the magnetic characteristics of steel, can be reduced to a system of integral equations, for example, for fictitious magnetic charges located along the boundary and volume of ferromagnetic bodies, which allows you to significantly narrow the search area for unknowns. At the same time, the core of integral equations includes the function $grad \mu$, the calculation of which is complicated by the numerical solution of these equations. The advantage of the method of secondary sources in this case is that this function can be explicitly expressed through the density of magnetic field sources. This, on the one hand, significantly simplifies the formation of the kernels of the integral equation, and on the other hand, increases the accuracy of its calculation when moving to a finite-dimensional analogue in the numerical solution of the system of integral equations.

In the work, the method of integral equations for calculating the characteristics of the magnetic field in nonlinear media was further developed in the direction of reducing the number of components in the kernels of the integral equations, which contain the function of the gradient from the magnetic permeability, and the subsequent explicit expression of this function through the density of the sources of the magnetic field, which enables the procedure numerical differentiation when approximating the gradient function from the magnetic permeability should be replaced by the numerical integration procedure, which is essential for increasing the accuracy of calculating the characteristics of the magnetic field in a non-linear medium.

In the *second* section, based on the method of secondary sources, the marginal problem of calculating the characteristics of the magnetic field in a brushless DC motor, taking into account the nonlinear magnetic properties of the material, is reduced to a system of integral equations for fictitious magnetic charges located along the boundary and volume of ferromagnetic bodies, which allows significantly narrow down the search area for unknowns.

The mathematical model for calculating the components of the magnetic field in a brushless DC motor has been improved, taking into account the nonlinear properties of ferromagnetic materials by simplifying the form of the kernels of integral equations by reducing the number of components containing $grad_{\varrho}\mu(Q)$, which allows to simplify the further numerical solution of these equations.

A method of calculating the function $grad_{\varrho}\mu(Q)$ was developed, taking into account the explicit representation of the magnetic field intensity through the density of magnetic charges, which allowed the process of its approximation by a finite-dimensional analogue to be performed by integration over the field sources, which allowed to reduce the error of its approximation, in contrast to the procedure of numerical differentiation of the function $\mu(Q)$ directly.

On the basis of direct integration of the expressions for the components of the magnetic field strength created by the system of currents located in the grooves in the form of a curvilinear trapezoid, analytical formulas for their determination have been derived, which allows to eliminate the error of the numerical calculation of the current field of the stator windings of the brushless DC motor.

The boundary value problem for the scalar magnetic potential of calculating the magnetic field of a permanent, homogeneously magnetized magnet of cylindrical shape in the plane of the ferromagnet has been solved. An analytical expression for the magnetic flux created by the magnetic system was derived, which made it possible to establish the limits of the change in the inner radius of the ferromagnetic insert, on the surface of which permanent magnets are placed, under the condition of the specified deviation of the magnetic flux from the maximum value.

In the *third* section, a methodology for calculating the characteristics of the magnetic field in electrical devices with thin bridges or magnetically saturated regions is developed, which allows you to identify regions with a pronounced saturation of ferromagnetic elements, to consider their magnetic permeability as a function $\mu(H)$, and to set a constant magnetic permeability for the rest of the ferromagnetic elements. This allows the complex task of calculating the characteristics of the magnetic field in an electrical device with ferromagnetic elements with a nonlinear magnetic characteristic to be reduced to the task of calculating the magnetic field in a piecewise homogeneous medium with constant magnetic permeability for some areas, and to take into account nonlinearities in individual localized areas. Solving the first problem is reduced to solving one integral equation for the density of a simple layer of magnetic charges distributed only along the boundary of ferromagnetic bodies with different magnetic permeability, for the second two integral equations are used: for the density of a simple layer of electric charges at the boundary of ferromagnetic bodies and for the density of of capacitive electric charges in the cross-section of ferromagnetic bodies. This significantly reduces the area of searching for a solution, in contrast to the method of finite differences or the method of finite elements, where the solution is searched, as a matter of fact, in the entire unlimited space.

It has been proven that during the nominal mode of operation of brushless DC motor, the ferromagnetic material from which bridges between the stator winding and the gap between the stator and the rotor are made enter a state of magnetic saturation, which significantly reduces the shunting of the magnetic flux of the stator and permanent magnet currents by bridges, magnetic permeability the material of which approaches the value of the magnetic permeability of air.

The novelty of the work is as follows:

The method of integral equations for calculation received further development characteristics of the magnetic field in nonlinear media in the direction of reducing the number of components in the kernels of integral equations that contain the function of the gradient from the magnetic permeability, and the further explicit expression of this function through the densities of the sources of the magnetic field, which makes it

possible to replace the procedure of numerical differentiation when approximating the function of the gradient from the magnetic permeability on the procedure of numerical integration, which is essential for increasing the accuracy of the calculation of the kernels of integral equations in the method of integral equations.

A new mathematical model and corresponding calculation method for the numerical calculation of the magnetic field in brushless DC motor with an implicit-pole smooth stator containing thin ferromagnetic bridges between the stator winding and the gap between the stator and an explicit-pole rotor with permanent magnets, which allow taking into account the nonlinear properties of the ferromagnetic elements of the magnetic field, have been developed engine systems.

It has been proven that during the nominal mode of operation of brushless DC motor, the ferromagnetic material from which the bridges between the stator winding and the gap between the stator and the rotor are made enter a state close to magnetic saturation with a non-uniform distribution of magnetic permeability, which significantly reduces the shunting of the magnetic flux of the stator currents and permanent magnets with these translations.

The proposed algorithm for calculating the magnetic field in brushless DC motor with an implicit-pole smooth stator, which contains thin ferromagnetic bridges between the stator winding and the gap between the stator and the obvious-pole rotor with permanent magnets, is of practical importance for the electrical engineering industry, which allows taking into account the nonlinear properties of the ferromagnetic elements of the motor's magnetic system. Based on it, a program was written in the FORTRAN language, which allows you to calculate the magnetic field in the working gap of the electric motor based on the known input data (geometric parameters of the system, electrophysical parameters of materials, characteristics of permanent magnets, current in the windings) and carry out optimization according to the selected criteria.

Key words: magnetic field, nonlinear medium, method of secondary sources, brushless DC motor.

ЗМІСТ

ВСТУП	20
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ	28
1.1 Математична модель тримірного магнітного поля в кусково-неоднорідному та нелінійному середовищі	28
1.2 Методи розрахунку характеристик магнітного поля в кусково-неоднорідному та нелінійному середовищі	34
1.2.1 Кінцево-різницеві методи	36
1.2.2 Інтегральні методи розрахунку магнітних полів	38
Висновки до розділу 1	48
РОЗДІЛ 2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПРОЦЕСУ В НЕЛІНІЙНИХ ФЕРОМАГНІТНИХ СЕРЕДОВИЩАХ	50
2.1 Двовимірна математична модель розрахунку характеристик магнітного поля у нелінійному феромагнітному середовищі	50
2.2 Перетворення ядер інтегральних рівнянь для зменшення кількості складових, що містять $grad_{\varrho}\mu(Q)$	53
2.3 Перетворення функції $grad_{\varrho}\mu(Q)$ з урахуванням явного представлення напруженості магнітного поля через густини магнітних зарядів	56
2.4 Ітераційний метод знаходження магнітної проникності з урахуванням нелінійної характеристики залежності $\mu(\vec{H})$	61
2.5 Безколекторний двигун постійного струму з неявнополюсним гладким статором і явнополюсним ротором	64
2.6 Двовимірна математична модель розрахунку характеристик магнітного поля у безколекторному двигуні постійного струму	66

		18
2.7	Розрахунок магнітного поля струмів обмотки статора безколекторного двигуна постійного струму	67
2.8	Магнітне поле постійних однорідно намагнічених магнітів, що наклеєні на гладку поверхню ротора	72
2.8.1	Зарядова модель постійного магніту	74
2.8.2	Струмова модель постійного магніту	80
2.9	Розрахунок магнітного потоку від постійного магніту у формі циліндру при наявності феромагнетиків	87
	Висновки до розділу 2	100
РОЗДІЛ 3 ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗРАХУНОКУ ХАРАКТЕРИСТИК МАГНІТНОГО ПОЛЯ У БЕЗКОЛЕКТОРНОМУ ДВИГУНІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ		102
3.1.	Апроксимація системи інтегральних рівнянь системою алгебраїчних рівнянь	102
3.1.1	Апроксимація ядра $K_1(M, Q)$ скінченновимірним аналогом	104
3.1.2	Апроксимація ядра $K_2(M, Q)$ скінченновимірним аналогом	108
3.1.3	Апроксимація ядра $K_3(M, Q)$ скінченновимірним аналогом	109
3.1.4	Апроксимація ядра $K_4(M, Q)$ скінченновимірним аналогом	111
3.1.5	Апроксимація правої частини інтегрального рівняння (3.6)	111
3.1.6	Апроксимація правої частини інтегрального рівняння (3.2)	112
3.2	Апроксимація функції $grad_{Q\mu}(Q)$ скінченновимірним аналогом	113
3.3	Простий ітераційний метод знаходження магнітної проникності при розв'язанні нелінійної задачі	118
3.4	Модифікований ітераційний метод знаходження магнітної проникності при розв'язанні нелінійної задачі	121
3.5	Результати розрахунку магнітного поля у робочому зазорі безколекторного двигуна постійного струму	125

	19
Висновки до розділу 3	134
ВИСНОВКИ	135
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	137
ДОДАТОК А СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ	159
ДОДАТОК Б АКТ ПРО ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ КАНДИДАТСЬКОЇ ДИСЕТАЦІЙНОЇ РОБОТИ	163
ДОДАТОК В ДОВІДКА ПРО ЗВ'ЯЗОК ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ З НАУКОВО-ДОСЛІДНОЮ РОБОТОЮ	165

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження

Однією з основних задач при проектуванні електромеханічних пристроїв, таких як електричні машини, тягові електромагніти або трансформатори, є розрахунок електромагнітного поля цих пристроїв.

На сьогодні пропонуються різні методи розрахунку магнітних полів з урахуванням реальних електрофізичних властивостей матеріалів, які різняться за постановкою, складністю чисельної реалізації, можливістю повного урахування реальної геометрії системи та реальних магнітних властивостей компонентів. Серед них – метод скінчених різниць, метод скінчених елементів, метод інтегральних рівнянь та інші методи. Незважаючи на великі можливості використовуваної в подібних розрахунках обчислювальної техніки, для більшості методів моделювання електромагнітних процесів зберігається необхідність підвищення точності, зниження трудомісткості і скорочення часу рахунку.

Багато електротехнічних пристроїв (електричні машини та апарати, елементи автоматики й обчислювальної техніки) містять феромагнітні елементи. Номінальні режими роботи таких пристроїв реалізуються зазвичай при значеннях магнітної індукції, які не призводять до значного насичення магнітом'яких матеріалів. У цей же час у деяких областях (наприклад, кутові зони, тонкі феромагнітні перекладки) значення магнітної індукції можуть перевищувати допустимі, що вимагає врахування нелінійної залежності $B(H)$ при розрахунку магнітного поля в таких пристроях.

На основі методу вторинних джерел крайову задачу розрахунку характеристик магнітного поля з урахуванням нелінійності магнітної характеристики сталі може бути зведено до системи інтегральних рівнянь, наприклад, для фіктивних магнітних зарядів, розташованих по границі та об'єму феромагнітних тіл, що дозволяє суттєво звузити область пошуку невідомих. При цьому у ядра інтегральних рівнянь входить функція $grad \mu$, розрахунок якої ускладняється при чисельному розв'язку цих рівнянь. Перевага методу вторинних

джерел у цьому випадку полягає в тому, що цю функцію можна явно виразити через густину джерел магнітного поля. Це з одного боку суттєво спрощує формування ядер інтегрального рівняння, а з іншого, підвищує точність її розрахунку при переході до скінченновимірною аналогу при чисельному розв'язку системи інтегральних рівнянь.

Тому розвиток методу інтегральних рівнянь для розрахунку магнітних полів у нелінійних середовищах є *актуальним науковим завданням*.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

У науково-дослідній роботі за темою «Розробка методів і засобів підвищення енергоефективності і екологічної безпеки електрообладнання в технологіях АПК» (номер державної реєстрації 0115U003344), яка виконувалася у Національному університеті біоресурсів і природокористування України, автором у підрозділі «Проведення теоретичних і експериментальних досліджень електромагнітних та електромеханічних процесів в електроприводі електротехнічного комплексу знезаражуючої та передпосівної обробки зерна» розроблено нову математичну модель і відповідний розрахунковий метод для чисельного розрахунку магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму з неявнополюсним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та явнополюсним ротором з постійними магнітами, що дозволяє враховувати нелінійні властивості феромагнітних елементів магнітної системи двигуна.

У науково-дослідній роботі за темою «Розвиток теорії електрофізичних процесів в імпульсних системах електромагнітної обробки електропровідних середовищ («Бар'єр-2»)» (номер державної реєстрації 0117U007714), яка виконувалася в Інституті електродинаміки Національної академії наук України, автором проведено аналіз геометрії розташування феромагнітних електропровідних труб у завантаженні, що дозволило врахувати симетрію електромагнітного поля і скоротити кількість шуканих змінних інтегральних рівнянь.

Мета і завдання дослідження

Метою роботи є удосконалення методу інтегральних рівнянь для розрахунку неоднорідних магнітних полів у нелінійних середовищах в напрямі зменшення кількості складових у ядрах інтегральних рівнянь, які містять функцію градієнту від магнітної проникності, та подальшого явного виразу цієї функції через густину джерел магнітного поля, та застосування цих підходів для розрахунку магнітних систем конкретних електротехнічних пристроїв.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити такі основні завдання:

– обґрунтувати необхідність вдосконалення існуючих методів розрахунку магнітних полів у нелінійних середовищах із використанням інтегральних рівнянь для густин вторинних джерел магнітного поля;

– удосконалити метод вторинних джерел для розрахунку магнітного поля у магнітних системах із нелійними феромагнітними елементами;

– розробити математичну модель та відповідний розрахунковий метод для аналізу магнітного поля у безколекторному двигуні постійного струму з неявнополюсним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та явнополюсним ротором з постійними магнітами;

– виявити закономірності розподілу магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму та визначити умови за яких тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором входять у стан магнітного насичення, що суттєво знижує шунтування магнітного потоку струмів статора і постійних магнітів цими перекладками.

Об'єктом досліджень є процеси у магнітних системах з нелійними феромагнітними елементами.

Предметом досліджень є спосіб формування ядер інтегральних рівнянь в методі вторинних джерел для розрахунку характеристик магнітного поля у нелінійних середовищах.

Методи дослідження

Вирішення поставлених у роботі завдань здійснювалося методами, що базуються на використанні теорії електромагнітного поля, векторного аналізу, концепції вторинних джерел, теорії інтегральних рівнянь, теорії апроксимації, теорії чисельного інтегрування, чисельного розв'язання систем інтегральних рівнянь, чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Наукова новизна отриманих результатів

1. *Отримав подальший розвиток* метод інтегральних рівнянь для розрахунку характеристик магнітного поля в нелінійних середовищах в напрямі зменшення кількості складових у ядрах інтегральних рівнянь, які містять функцію градієнту від магнітної проникності, та подальшого явного виразу цієї функції через густини джерел магнітного поля, що дає змогу замінити процедуру чисельного диференціювання при апроксимації функції градієнту від магнітної проникності на процедуру чисельного інтегрування, що має суттєве значення для підвищення точності розрахунку ядер інтегральних рівнянь в методі інтегральних рівнянь.

2. Розроблено *нову* математичну модель і відповідний розрахунковий метод для чисельного розрахунку магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму з неявнополюсним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та явнополюсним ротором з постійними магнітами, що дозволяють враховувати нелінійні властивості феромагнітних елементів магнітної системи двигуна.

3. *Доведено*, що при номінальному режимі роботи безколекторного двигуна постійного струму феромагнітний матеріал, з якого виготовлено перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором, входять у стан близький до магнітного насичення з неоднорідним розподілом магнітної проникності, що суттєво знижує шунтування магнітного потоку струмів статора і постійних магнітів цими перекладками.

Практичне значення отриманих результатів

Розроблені математичні моделі для розрахунку характеристик магнітного поля у нелінійних середовищах з використанням методу вторинних джерел можуть

бути використані в навчальному процесі на кафедрі електротехніки, електромеханіки та електротехнологій Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Практичне значення для електротехнічної галузі має запропонований алгоритм розрахунку магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму з неявнополюсним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та явнополюсним ротором з постійними магнітами, що дозволяє враховувати нелінійні властивості феромагнітних елементів магнітної системи двигуна. На основі нього написано програму мовою *FORTRAN*, яка дозволяє за відомими вхідними даними (геометричні параметри системи, електрофізичні параметри матеріалів, характеристики постійних магнітів, струму у обмотках) розрахувати магнітне поле у робочому зазорі електричного двигуна та провести оптимізацію за обраними критеріями.

Особистий внесок здобувача

Безпосередньо автором здійснено:

- інформаційний пошук та аналіз літературних даних за темою дисертації;
- розв'язано задачу розрахунку магнітного поля від однорідно-намагніченого постійного магніту, що розташований між двома феромагнітними тілами циліндричної форми;
 - з використанням методу вторинних джерел розроблено дво- та тривимірну математичні моделі для розрахунку характеристик магнітного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики;
 - виведено аналітичні формули для розрахунку плоскопаралельного стаціонарного магнітного поля струмів, розміщених у пазах криволінійної трапецеїдальної форми статора вентильного двигуна;
 - удосконалено математичну модель розрахунку характеристик магнітного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики шляхом модифікації ядер інтегральних рівнянь в напрямі

зменшення складових, що містять функцію $grad\mu$;

– розроблено математичну модель вентильного двигуна з висококоерцитивними постійними магнітами, в основі якої лежить метод вторинних джерел, що дав змогу завдання визначення розподілу магнітної проникності у феромагнітних елементах двигуна звести до розв'язання системи інтегральних рівнянь для густини простого шару й густини об'ємних магнітних зарядів. Запропоновано ітераційний метод знаходження магнітної проникності з урахуванням її нелінійної залежності;

– розроблено метод розрахунку характеристик магнітного поля в електромеханічних системах з тонкими перекладками на основі зведення початково-крайової задачі для рівнянь Максвелла до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь з подальшим її чисельним розв'язуванням.

Наукові роботи опубліковані у співавторстві з Жильцовим А. В., Кондратенком І. П., Усенком С. М.

Співавторами наукових праць є науковий керівник та науковці, спільно з якими проведені дослідження. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, дисертанту належить фактичний матеріал і основний творчий доробок.

Співавторами наукових праць дисертанта захищені такі дисертації: Кондратенко І. П. «Электромагнитные поля и процессы в индукционных системах для термического и силового воздействия на металлы», Київ, 2005. 329 с.; Жильцов А. В. Математическое моделирование нестационарных процессов электромагнитного воздействия на жидкий металл», Київ, 2009. 320 с.; Усенко С.М. «Знезаражуюча обробка зерна в електротехнологічному комплексі під дією електричного поля високої напруженості», Київ, 2013. 254 с.

Постановка мети та завдань, обговорення результатів проведені разом з науковим керівником.

Апробація результатів дисертації

Всі найбільш важливі положення та результати дисертаційної роботи були обговорені на наукових конференціях та семінарах: IV Міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні питання сталого розвитку

сільськогосподарського виробництва» (Бережани, 24–25 квітня 2014); XV Міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми енергоресурсозбереження в електротехнічних системах. Наука, освіта і практика». (Кременчук, 14–16 травня 2014); II Міжнародній науково-практичній конференції молодих вчених «Відновлювальна енергетика, новітні автоматизовані технології в біотехнічних системах АПК» (Київ, 16–17 жовтня 2014); Науково-практичній конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів «Підсумки науково-дослідних робіт 2014 року» (Київ, 22–23 квітня 2015); семінарі «Електротехнології та електрообладнання в системі біоресурсів і природокористування» Наукової Ради з проблеми «Наукові основи електроенергетики» Інституту електродинаміки НАН України (Київ, травень 2015); III Міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування (теорія, практика, історія, освіта)» (Київ, 14–18 грудня 2015); семінарі «Електротехнології та електрообладнання в системі біоресурсів і природокористування» Наукової Ради з проблеми «Наукові основи електроенергетики» Інституту електродинаміки НАН України (Київ, грудень 2015); IV Міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування (теорія, практика, історія, освіта)» (Київ, 10–14 травня 2016); V Міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування (теорія, практика, історія, освіта)» (Київ, 14–18 листопада 2016); XV Міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми сучасної електротехніки - 2018» (Київ, 04–08 червня 2018); VII Міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування (теорія, практика, історія, освіта)» присвяченій 120-річчю НУБіП України (Київ, 23–27 травня 2018); Науково-практичній конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів «Підсумки науково-дослідних робіт 2017 року» присвяченій 120 річниці НУБіП України (Київ, 19–20 квітня 2018).

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота викладена на 165 сторінках машинописного тексту, складається зі вступу, 3 розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та 3 додатків. Обсяг основного тексту дисертації складає 136 сторінок друкованого тексту. Робота ілюстрована 2 таблицями та 25 рисунками. Список використаних джерел містить 202 найменування, з них 195 кирилицею та 7 латиницею.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ МАГНІТНИХ ПОЛІВ У НЕЛІНІЙНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Різноманітність електротехнічних і електроенергетичних пристроїв, які знаходять широке застосування у різних областях людської діяльності, вимагає всебічного дослідження їх передбачуваних техніко-економічних характеристик і властивостей ще до моменту їх виготовлення. Дослідження цих питань на першому етапі передбачає математичне моделювання основних характеристик розроблюваних пристроїв з урахуванням як геометричних параметрів так і фізичних властивостей використовуваних при їх проектуванні матеріалів для створення сучасної конкурентоспроможної продукції.

Одним з основних і найвідповідальніших етапів процедури математичного моделювання параметрів електротехнічних пристроїв є розрахунок характеристик створюваного ними електромагнітного поля. Для досягнення цієї мети в сучасних умовах найбільш широко застосовуються різні чисельні методи розрахунку електромагнітних полів із застосуванням обчислювальної техніки. У багатьох випадках, особливо при наявності конструктивних елементів зі складною конфігурацією та наявності феромагнітних елементів, етап розробки і проектування взагалі неможливий без подібних досліджень.

1.1 Математична модель тримірного магнітного поля в кусково-неоднорідному та нелінійному середовищі

Сформулюємо задачу розрахунку електромагнітного поля у феромагнітному середовищі в вигляді крайової задачі на прикладі електромагнітної системи, що зображена на рис. 1.1: V^+ – область, зайнята феромагнітними тілами; S – поверхня, що обмежує область V^+ ; V_w – область, що займають провідники, у яких протікають струми зі густиною $\vec{\delta}_w(Q)$; S_w – поверхня, що обмежує область V_w ; V_M – область,

що займають однорідно-намагнічені постійні магніти з намагніченістю \vec{J} ; S_M – поверхня, що обмежує область V_M .

Будемо вважати феромагнітне середовище в області V^+ (рис. 1.1) об'ємно-неоднорідним, а далі і нелінійним. Почнемо з випадку об'ємно-неоднорідного середовища, тобто будемо вважати магнітну проникність μ відомою (заданою) функцією координат точки Q спостереження $\mu = \mu(Q)$. Далі, узагальнимо отримані результати на випадок об'ємно-нелінійних середовищ, тобто нелінійні властивості середовища будуть визначатись залежністю $\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$, де \vec{B} , \vec{H} – індукція та напруженість магнітного поля, $H = |\vec{H}|$ – модуль напруженості магнітного поля.

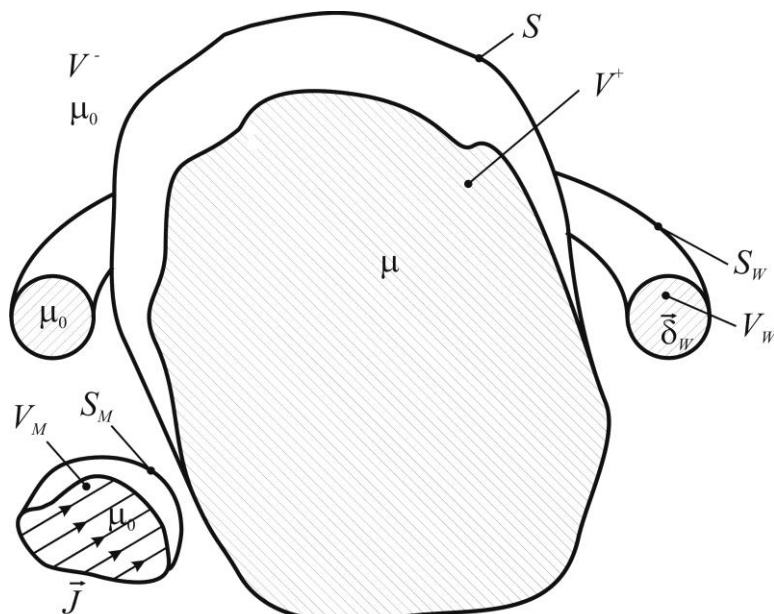


Рис. 1.1.

У загальному випадку розрахунок характеристик електромагнітного поля у наведеній системі потребує розв'язання тривимірної крайової задачі для системи рівнянь Максвелла в необмеженій області [7]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \vec{B} = \mu(H)\vec{H}; \vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \vec{\delta} = \gamma \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де \vec{H} – вектор напруженості магнітного поля, А/м; $\vec{\delta}$ – вектор густини струму, А/м³

(поза провідниками необхідно припустити, що $\vec{\delta}=0$); \vec{D} – вектор електричного зміщення, Кл/м²; t – час, с; \vec{E} – вектор напруженості електричного поля, В/м; \vec{B} – вектор магнітної індукції, Тл; ρ – об'ємна густина вільного заряду, Кл/м³; $\mu(H)$ – абсолютна магнітна проникність середовища, як функція напруженості магнітного поля H , Гн/м; ε – абсолютна діелектрична проникність середовища, Ф/м; γ – питома провідність, См/м.

Система рівнянь (1.1), доповнена граничними та початковими умовами, формулює початково-крайову задачу, до розв'язання якої зводиться розрахунок характеристик електромагнітного процесу в електромагнітній системі.

Будемо вважати геометрію електромагнітної системи, напруги та струми провідності, що діють у системі та швидкість (частоту) зміни електромагнітного поля такими, що можна знехтувати струмом зміщення.

Для однозначного визначення характеристик електромагнітного поля необхідно до диференціальних рівнянь (1.1) додати такі додаткові умови [7]:

- безперервність нормальної складової густини струму на поверхні провідників (впливає із знехтування струмами зсуву поза та всередині провідників);

- безперервність нормальної складової індукції та дотичної складової напруженості магнітного поля на поверхні S ;

- безперервність нормальної складової напруженості та дотичної складової електричного зміщення електричного поля на поверхні S ;

- відомо початковий розподіл густини струму $\vec{\delta}_w^{(0)}(M)$ як функцію координат точки M по провідниках зі струмом;

- миттєва індукція магнітного поля $\vec{B}(M, t)$ та миттєва напруженість електричного поля прямує до нуля при $M \rightarrow \infty$ як $1/r^2$, де r — радіус-вектор, який задає положення точки M .

У випадку якщо знехтуємо струмами зміщення розрахунок магнітного поля у електромагнітній системі зводиться до наступної системи рівнянь:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}\vec{B}=0, \quad (1.3)$$

На границі S розділу середовищ повинні виконуватись наступні граничні умови для векторів \vec{H} і \vec{B} [7]

$$\operatorname{Rot}\vec{H}=0, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{Div}\vec{B}=0, \quad (1.5)$$

де $\operatorname{Rot}\vec{H}(Q)=\vec{n}_Q \times (\vec{H}^-(Q) - \vec{H}^+(Q))$ – поверхневий ротор;

$\operatorname{Div}\vec{B}(Q)=\vec{n}_Q \cdot (\vec{B}^-(Q) - \vec{B}^+(Q))$ – поверхнева дивергенція; \vec{n}_Q – нормаль у точці Q до поверхні розділу двох середовищ, яка спрямована з середовища V^+ до середовища V^- ; $\vec{H}^-(Q)$, $\vec{B}^-(Q)$ – напруженість та індукція магнітного поля в точці Q границі розділу середовищ S із боку середовища V^- ; а $\vec{H}^+(Q)$, $\vec{B}^+(Q)$ – напруженість та індукція магнітного поля в точці Q границі розділу середовищ S із боку середовища V^+ .

Представимо напруженість магнітного поля \vec{H} у вигляді двох складових:

$$\vec{H}(Q)=\vec{H}^{(B)}(Q)+\vec{H}^{(S)}(Q), \quad (1.6)$$

де $\vec{H}^{(B)}(Q)$ – вихрова складова напруженості магнітного поля, обумовлена струмами провідності $\vec{\delta}_w$ (рис. 1.1), а $\vec{H}^{(S)}(Q)$ – безвихрова складова магнітного поля, обумовлена намагніченим матеріалом під дією зовнішнього магнітного поля.

Оскільки

$$\vec{B}(Q)=\mu(Q)\vec{H}(Q), \quad (1.7)$$

то підставивши співвідношення (1.6), (1.7) у вираз (1.2) – (1.5) запишемо:

$$\operatorname{rot}\vec{H}^{(B)} + \operatorname{rot}\vec{H}^{(S)} = \vec{\delta}_w,$$

$$\operatorname{div}(\mu\vec{H}^{(B)}) + \operatorname{div}(\mu\vec{H}^{(S)}) = 0, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{Rot}\vec{H}^{(B)} + \operatorname{Rot}\vec{H}^{(S)} = 0, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{Div}(\mu\vec{H}^{(B)}) + \operatorname{Div}(\mu\vec{H}^{(S)}) = 0. \quad (1.10)$$

Враховуючи, що $\operatorname{rot}\vec{H}^{(B)} = \vec{\delta}_w$ і $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, а також безперервність вихрової

складової напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(B)}$ у всьому просторі, приходимо до висновку, що $rot\vec{H}^{(B)}=0$. Тому, поза областями зі струмом можна ввести скалярний магнітний потенціал φ_M :

$$\vec{H}^{(B)}(Q)=-grad_Q\varphi_M(Q), \quad (1.11)$$

або

$$\varphi_M(Q)=-\int_{Q_0}^Q \vec{H}^{(B)}(P)dl_P, \quad (1.12)$$

де Q_0 – точка нульового значення потенціалу.

Із виразу (1.8) з урахуванням виразу (1.11) отримаємо, що:

$$\begin{aligned} &div_Q[\mu(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)]+div_Q[\mu(Q)\vec{H}^{(B)}(Q)]= \\ &=\mu(Q)div_Q\vec{H}^{(B)}(Q)+\vec{H}^{(B)}(Q)\cdot grad_Q\mu(Q)+ \\ &+\mu(Q)div_Q\vec{H}^{(B)}(Q)+\vec{H}^{(B)}(Q)\cdot grad_Q\mu(Q)=\mu(Q)div_Q\vec{H}^{(B)}(Q)+ \\ &+\vec{H}^{(B)}(Q)\cdot grad_Q\mu(Q)=-\mu(Q)div_Q grad_Q\varphi_M(Q)+ \\ &+\vec{H}^{(B)}(Q)\cdot grad_Q\mu(Q)=-\mu(Q)\Delta\varphi_M(Q)+\vec{H}^{(B)}(Q)\cdot grad_Q\mu(Q). \end{aligned}$$

Тобто,

$$\Delta\varphi_M(Q)=\frac{\vec{H}^{(B)}(Q)\cdot grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)}. \quad (1.13)$$

Якщо ввести позначення

$$\rho_M(Q)=-\frac{\mu_0\vec{H}^{(B)}(Q)\cdot grad_Q\mu(Q)}{\mu(Q)}, \quad (1.14)$$

тоді вираз (1.13) прийме вигляд

$$\Delta\varphi_M(Q)=-\frac{\rho_M(Q)}{\mu_0}. \quad (1.15)$$

Таким чином, отримано рівняння Пуассона, де $\rho_M(Q)$ є об'ємною густиною магнітних зарядів, при цьому поза магнітним матеріалом магнітних зарядів немає, і тому:

$$\Delta\varphi_M^+(Q) = -\frac{\rho_M(Q)}{\mu_0} \text{ в } V^+, \quad (1.16)$$

$$\Delta\varphi_M^-(Q) = 0 \text{ в } V^-. \quad (1.17)$$

Доповнимо рівняння (1.16) і (1.17) граничними умовами для магнітного потенціалу φ_M . Скористаємося виразами (1.9) і (1.10), (1.11), тоді запишемо:

$$H_t^{(B)}(Q) + H_t^{(B)}(Q) = H_t^{(B)-}(Q) + H_t^{(B)-}(Q), \quad Q \in S, \quad (1.18)$$

де індекс t позначає тангенціальну компоненту вектора напруженості магнітного поля.

Враховуючи безперервність вихрової складової напруженості магнітного поля $H^{(B)}(Q)$ при проході через границю S , отримаємо:

$$H_t^{(B)+}(Q) = H_t^{(B)-}(Q)$$

або

$$\varphi_M^+(Q) = \varphi_M^-(Q), \quad Q \in S. \quad (1.19)$$

Аналогічно

$$\mu_0 H_n^{(B)-}(Q) + \mu_0 H_n^{(B)-}(Q) = \mu(Q) H_n^{(B)+}(Q) + \mu(Q) H_n^{(B)+}(Q),$$

де індекс n позначає нормальну компоненту вектора напруженості магнітного поля.

Враховуючи безперервність $\vec{H}^{(B)}(Q)$ при переході через границю S отримаємо наступний вираз для нормальних складових поля:

$$\mu(Q) H_n^{(B)+}(Q) - \mu_0 H_n^{(B)-}(Q) = (\mu_0 - \mu(Q)) H_n^{(B)}(Q), \quad Q \in S.$$

Звідки

$$\mu(Q) \frac{\partial \varphi_M^+(Q)}{\partial n} - \mu_0 \frac{\partial \varphi_M^-(Q)}{\partial n} = (\mu(Q) - \mu_0) H_n^{(B)}(Q), \quad Q \in S. \quad (1.20)$$

Об'єднавши вирази (1.16), (1.17), (1.19), (1.20) і (1.14) отримаємо крайову задачу для розрахунку характеристик тривимірного магнітного поля в магнітній системі (рис. 1.1) з урахуванням неоднорідності магнітних властивостей матеріалу:

$$\Delta\varphi_M^+(Q) = -\frac{\rho_M(Q)}{\mu_0}, \quad Q \in V^+, \quad (1.21)$$

$$\Delta\varphi_M^-(Q)=0, Q\in V^-, \quad (1.22)$$

$$\varphi_M^+(Q)=\varphi_M^-(Q), Q\in S, \quad (1.23)$$

$$\mu(Q)\frac{\partial\varphi_M^+(Q)}{\partial n}-\mu_0\frac{\partial\varphi_M^-(Q)}{\partial n}=(\mu(Q)-\mu_0)H_n^{(B)}(Q), Q\in S, \quad (1.24)$$

де

$$\rho_M(Q)=-\frac{\mu_0\vec{H}(Q)\text{grad}_Q\mu(Q)}{\mu(Q)}. \quad (1.25)$$

1.2 Методи розрахунку характеристик магнітного поля в кусково-неоднорідному та нелінійному середовищі

Методи розрахунку електромагнітного поля розвиваються та вдосконалюються відповідно до потреб практики і сучасного стану теоретичної бази, зокрема, математичної фізики та обчислювальної математики [8].

При аналізі електромагнітного поля у феромагнітному середовищі з нелінійною магнітною проникністю найбільшого розповсюдження набули аналітичні та чисельні методи розрахунку [9].

Аналітичні методи можуть застосовуватися тільки в найпростіших випадках. В основу диференціальних рівнянь, на розв'язанні яких засновані дані методи, покладені рівняння електромагнітного поля. Також аналітичні методи широко використовують теорію електричних і магнітних кіл, а також теорію електромагнітного поля [10]. Їхнє використання передбачає представлення шуканої функції у вигляді явної залежності від вихідних даних.

Описування нелінійних залежностей (наприклад $\mu(H)$) шляхом використання аналітичних рівнянь не дозволяє отримати достовірний аналітичний розв'язок [11]. Це пояснюється частим нелінійним характером рівняння для складових векторів електромагнітного поля. Отримання простих аналітичних розв'язків у таких випадках можливе в силу використання різного роду допущень.

Частина аналітичних методів широко використовуються при вирішенні

крайових задач і стали класичними. Як перевагу даних методів вважають простоту виведеного виразу і можливість отримання точного значення результату в будь-якій точці розрахункової області. Їх недоліками є громіздкість аналітичних перетворень, що дає високу ймовірність помилки і вузька область застосування.

У більш складних випадках використовуються чисельні методи [12], які суттєво розширюють клас розв'язуваних задач і легко реалізуються на ЕОМ. Але ці методи, як правило, вимагають великого часу розрахунку і на виході мають дискретний спектр значень, сукупність яких називається наближеним рішенням задачі.

Для розв'язання системи рівнянь (1.21) – (1.25) використовують зазвичай чисельні методи, які умовно можна розбити на дві групи: інтегральних рівнянь та диференціальних рівнянь.

До першої групи належать методи, в основі яких лежить зведення початково-граничної задачі для розрахунку компонент електромагнітного поля до системи інтегральних рівнянь для густин вторинних джерел або намагніченості з наступним їх зведенням до скінченновимірних аналогів – систем алгебраїчних рівнянь, що піддаються чисельному розв'язанню на ЕОМ.

До другої групи, в першу чергу, можна віднести методи скінченних різниць (МСР) та скінченних елементів (МСЕ), розроблені на їх основі, наприклад, методи скінченних об'ємів та поглинаючих граничних умов [13], комбіновані методи [14, 15] та інші.

Методи скінченних елементів і скінченних різниць інтенсивно розвивалися в працях Г. Стренга і Дж. Фікса [16], Ж. Обен [17], Л. Сегерлінда [18], П. Сильвестера і Р. Феррарі [19], А. А. Самарського [20], Ю. А. Бахвалова, А.І. Бондаренко [21], К. С. Демерчана, Н. І. Солнишкіна [22], В. П. Ільїна [12], В.Л. Чечуріна [23], Бенерджи П., Баттерілд [24] та ін.

1.2.1 Кінцево-різницеві методи

Метод сіток (або метод скінченних різниць) – один з найпоширеніших

методів розрахунку електромагнітних полів. Даний метод ґрунтується на заміні диференціального рівняння Пуассона (1.21) чи Лапласа (1.22) кінцево-різницеvim аналогом [10, 25 – 27], таким чином задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь великого порядку з стрічковою матрицею коефіцієнтів. Використання методу скінченних різниць обмежується закритими областями, тобто при розв'язанні внутрішніх задач Діріхле чи Неймана [28]. Таке обмеження спричинене необхідністю ставити умови для компонент магнітного поля (індукції або напруженості магнітного поля) або потенціалів на границях розрахункової області. Метод сіток застосовується при розрахунку поля як в однорідних, так і в кусково-однорідних середовищах. Успішно використовується метод скінченних різниць при розрахунку полів з урахуванням об'ємного заряду. Переваги методу сіток найяскравіше проявляються при розрахунку поля в анізотропних, неоднорідних та таких, що мають шарувату структуру в середовищах. Стійкість розв'язку задачі методом скінченних різниць залежить від побудови стійких швидкодіючих ітераційних схем розв'язку систем алгебраїчних рівнянь.

За останні двадцять років домінуюче положення, завдяки універсальності і простоті програмування, займає метод кінцевих елементів [29, 30], а створені на його основі проблемно-орієнтовані пакети прикладних програм набули широкої популярності в науковому світі (*COMSOL Multiphysics* [30], *ANSYS* [32] та ін.). Однак їх аналіз показує, що вони не забезпечують високу ефективність розв'язання різноманітних задач через великі витрати обчислювальних ресурсів на розрахунок одного варіанту, що особливо проявляється при розгляді тривимірних задач. Цим можна пояснити відсутність в цих програмних комплексах функціональної можливості вирішення ще більш ресурсоємних задач оптимального проектування, не зважаючи на те, що робота у цьому напрямку іде. Крім того, при наявності істотних локальних особливостей поля, що розраховується, як показує практика, застосування згаданих пакетів дає недостовірні результати [8].

Концепція методу скінченних елементів [7, 10, 25, 33, 34] ґрунтується на тому, що шукана безперервна функція, якою найчастіше є потенціал, апроксимується наближеною функцією. Остання побудована на безлічі

найпростіших функцій (зокрема, лінійних) в кінцевому числі елементарних областей, в загальному випадку криволінійних. Варіаційним принципом завдання зводиться до системи лінійних рівнянь відносно значень елементарних функцій у вузлових точках.

Метод скінченних елементів має ряд переваг в порівнянні з методом скінченних різниць. По-перше дозволяє досить точно описувати складні границі через застосування криволінійних елементів, по-друге є можливість отримувати значення напруженості аналітичним диференціюванням потенціалу, використовуючи апроксимацію розподілу потенціалу всередині кожного елемента.

У роботах [13, 35] отримує розвиток метод кінцевих об'ємів та поглинаючих граничних шарів/умов. Розрахункова область для знаходження розподілу постійного магнітного поля біля феромагнітного об'єкту розбивається на комірки-паралелепіпеди. Властивості середовища в межах кожної з них вважаються однорідними. Дана розбивка повинна бути проведена у такій спосіб, щоб вузли розрахункової сітки лежали на границях середовищ. Розв'язок отримується методом кінцевих об'ємів [35]. Даний метод полягає у інтегруванні рівнянь Максвелла за елементарними об'ємами, що охоплюють вузли сітки розрахункової області.

Проте при розрахунку магнітних полів кінцево-різницевиими методами потрібно відзначити ряд труднощів. По-перше, похибки, які виникають у процесі дискретизації. У всіх чисельних розрахунках передбачається та чи інша дискретизація в областях визначення розглянутих операторів та їх результатів. Ці похибки є головним недоліком всіх чисельних методів, якого неможливо уникнути. Проте дискретизація функцій, що описують розподіл джерел, завжди призводить до більш гладких розподілів, ніж дискретизація самих полів [36]. По-друге, при використанні МКР і МСЕ доводиться штучно обмежувати область, в якій досліджується поле, вводити додаткові умови, які замінюють вплив неврахованих областей. Незважаючи на появу робіт [28, 29, 37 – 41], в яких МКР і МСЕ розвиваються для необмежених областей, це питання досі становить проблему. По-третє, при використанні розглянутих методів особливу складність представляє

собою апроксимація диференціальних операцій поблизу границь розділу середовищ, саме там, де розподіл поля в більшості практичних задач становить найбільший інтерес. Складнощі виникають і при врахуванні особливостей в околицях кутових точок [42, 43, 44].

1.2.2 Інтегральні методи розрахунку магнітних полів

Іншим підходом щодо розв'язку початково-крайової задачі для розрахунку характеристик магнітного поля у нелінійному середовищі є підхід заснований на концепції вторинних джерел.

Згідно концепції вторинних джерел [45–50] розрахунок поля у неоднорідному просторі, що заповнений неоднорідним або нелінійним середовищем, може бути зведений до розрахунку поля у однорідному просторі, створеному як первинними джерелами (струми обмотки чи магніти) так і вторинними джерелами. Під останніми розуміється густина фіктивних поверхневих та об'ємних магнітних зарядів, магнітних моментів або струмів. Використовуються джерела того чи іншого типу залежно від поля, яке потрібно розраховувати. При цьому розподіл густини вторинних джерел повинен бути таким, щоб забезпечити виконання умов або для векторів поля, або для скалярного потенціалу, або для векторного потенціалу на межі розділу, що еквівалентно задоволенню деякого інтегрального рівняння.

Перший варіант інтегральних рівнянь, що стосувались задач електро- і магнітостатики був запропонований Г.А. Грінбергом [51]. Робота була опублікована в 1948 році. Практичне використання інтегральних рівнянь для розрахунку тривимірних магнітних полів складних магнітних систем в той час не могло бути застосоване. Зацікавленість методом інтегральних рівнянь зросла після появи в кінці шістдесятих - початку сімдесятих років робіт О.В. Тозоні [45 – 50], І. Д. Маєргойза [50, 52], Е. І. Петрушенка [53 – 63], Е.В. Колесникова [64, 65], В.І. Астахова [66], Б.Н. Сиплівого [67], І.П. Стадника [68], В.М. Михайлова [69 – 74] та інш., в яких метод інтегральних рівнянь був представлений у фізичній інтерпретації

як метод вторинних джерел. У цих роботах було здійснено побудову і теоретичне обґрунтування математичних моделей електромагнітного поля в кусково-однорідних, неоднорідних, нелінійних середовищах, а також математичних моделей для розрахунку вихрових струмів у масивних провідниках, на основі інтегральних рівнянь, а також впровадження методу в практику електротехнічних розрахунків приладів і пристроїв.

Подальші дослідження, пов'язані з розрахунком електромагнітних полів на основі методу інтегральних рівнянь, були проведені Є. І. Петрушенко [76 – 97], С. С. Романовичем [98 – 103], С. Т. Толмачовим [104 – 114, 11], В. М. Михайловим [115 – 117], І. П. Стадником [118 – 138], А. В. Жильцовим [134 – 181], І. І. Пеккером [182 – 186], П. А. Курбатовим, С. А. Арінчіним [187 – 189], А. Г. Кірсановим [190 – 192], В. Г. Тракаєм [193], А. Д. Подольцевим [194], та ін.

До теперішнього часу відомі два основні підходи до формулювання математичного опису магнітної системи на основі інтегральних рівнянь: метод граничних інтегральних рівнянь (або метод вторинних джерел) і метод просторових інтегральних рівнянь.

У роботі [46] дослідження статичного магнітного поля в сталі зведено до розв'язання варіаційної задачі знаходження мінімуму деякого функціоналу в області D , що зайнята сталлю, за умовою

$$\mu > 0, \frac{dB}{dH} > 0$$

один мінімум.

Так, для розв'язання крайової задачі (плоскопаралельний випадок) достатньо знайти таку функцію $\varphi(x, y)$, при якій функціонал

$$J(\varphi) = \int_D \left[\int_0^H \mu(H_1) H_1 dH_1 \right] dx dy - \oint_L f(l) \varphi(l) dl,$$

де

$$f = -\mu(\varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_L = B_n \Big|_L,$$

досягає абсолютного мінімуму.

Тут L – контур, що обмежує область D ; H – напруженість магнітного поля; B_n – нормальна складова вектора магнітної індукції на контурі; $\varphi(x, y)$ – скалярний магнітний потенціал; $\mu(H)$ – магнітна проникність.

У роботі [50] на основі концепції вторинних джерел крайова задача (1.21) – (1.25) для розрахунку характеристик магнітного поля в неоднорідному середовищі виведено систему інтегральних рівнянь:

$$\sigma_M(Q) - \frac{\lambda(Q)}{2\pi} \oint_S \sigma_M(M) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^3} dS_M = \frac{\lambda(Q)}{2\pi} \int_{V^+} \rho_M(M) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^3} dV_M + 2\mu_0 \lambda(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q, \quad Q \in S, \quad (1.26)$$

$$\rho_M(Q) + \frac{1}{4\pi} \int_{V^+} \rho_M(M) \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^3} dV_M = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma_M(M) \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^3} dS_M - \frac{\mu_0 \vec{H}^{(B)}(Q) \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q)}, \quad Q \in V^+, \quad (1.27)$$

де $\sigma_M(Q)$ – поверхнева густина магнітних зарядів, $Q \in S$; $\rho_M(Q)$ – об'ємна густина магнітних зарядів, $Q \in V^+$; \vec{r}_{MQ} – радіус вектора проведений з точки M в точку Q ; $\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q$ – скалярний добуток векторів \vec{r}_{MQ} і \vec{n}_Q ; $\lambda(Q) = (\mu(Q) - \mu_0) / (\mu(Q) + \mu_0)$ – параметр інтегрального рівняння, $Q \in S$; $\mu(Q)$ – абсолютна магнітна проникність феромагнітного середовища V^+ як функція координат точки Q , $Q \in V^+$; $\vec{H}^{(B)}(Q)$ – напруженість магнітного поля, що створюють струми провідності та постійні магніти.

Оскільки ядра системи інтегральних рівнянь є ядрами із слабкою особливістю, тобто належать до ядер типу $K(Q, M) = F(Q, M) / r_{QM}^\alpha$, де $0 \leq \alpha \leq m$, m – розмірність простору, а $F(Q, M)$ безперервна функція аргументів координат точок Q і M , то для них застосовують теореми Фредгольма [45, 75].

Система інтегральних рівнянь (1.26) – (1.27) для будь-якої диференційованої функції $\mu(Q) > 0$ розв'язується однозначно.

Якщо розв'язано систему інтегральних рівнянь (1.26) – (1.27) напруженість

магнітного поля знаходиться за виразом

$$\vec{H}(Q) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \oint_S \sigma_M(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dS_M + \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{V^+} \rho_M(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^3} dV_M + \vec{H}^{(B)}(Q). \quad (1.28)$$

Для розв'язання чисельним методом система інтегральних рівнянь (1.26), (1.27) мало придатна в силу того, що параметр $\lambda(Q) = (\mu(Q) - \mu_0) / (\mu(Q) + \mu_0)$ як правило в реальних магнітних системах наближається до одиниці, а це приводить до поганої стійкості розв'язку до малих збурень правої частини та до накопичення обчислювальної похибки. Тому цю систему інтегральних рівнянь в [50] перетворено з урахуванням апріорно відомих інтегральних властивостей вторинних джерел: сумарний магнітний заряд повинен бути рівний нулю, тобто

$$\int_S \sigma_M(Q) dS_Q + \int_{V^+} \rho_M(Q) dV_Q = 0. \quad (1.29)$$

Використовуючи це співвідношення, система рівнянь (1.26), (1.27) може бути перетворена до іншого більш зручного для чисельного розв'язання вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma_M(Q) - \frac{1}{2\pi} \oint_S \sigma_M(M) \left[\lambda(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^3} - \frac{1}{S} \oint_S \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^3} dS_P \right] dS_M = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{V^+} \rho_M(M) \left[\lambda(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^3} - \frac{1}{S} \oint_S \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^3} dS_P - \frac{2\pi}{S} \right] dV_M + \\ + 2\mu_0 \left[\sigma(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q - \frac{1}{S} \oint_S \sigma(P) \vec{H}^{(B)}(P) \vec{n}_P dS_P \right], \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \rho_M(Q) + \frac{1}{4\pi} \int_{V^+} \rho_M(M) \left[\frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^3} - \frac{1}{V^+} \int_{V^+} \frac{\vec{r}_{MP} \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P) r_{MP}^3} dV_P \right] dV_M = \\ = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma_M(M) \left[\frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^3} - \frac{1}{V^+} \int_{V^+} \frac{\vec{r}_{MP} \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P) r_{MP}^3} dV_P + \frac{4\pi}{V^+} \right] dS_M - \\ - \mu_0 \left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q) \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q)} - \frac{1}{V^+} \int_{V^+} \frac{\vec{H}^{(B)}(P) \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P)} dV_P \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Система рівнянь (1.30), (1.31) утворює повну систему інтегральних рівнянь для розрахунку характеристик магнітного поля як у неоднорідному середовищі так і нелінійному середовищі. Для останнього випадку слід організувати процес

послідовних наближень. Задається первісний розподіл магнітної проникності $\mu(x, y, z)$ та, розв'язуючи систему інтегральних рівнянь (1.30), (1.31), знаходимо відповідні цьому розподілу густини магнітних зарядів $\sigma_M(Q)$ та $\rho_M(Q)$. За знайденими густинами визначається напруженість магнітного поля за формулою (1.28) та, використовуючи відому залежність $\mu = \mu(H)$, уточняється попередній розподіл магнітної проникності, після чого починається новий крок послідовних наближень.

Розвиток концепції вторинних джерел для розрахунку характеристик магнітного поля у нелінійному середовищі отримав у роботі [52]. Відповідно до розробленого там підходу, напруженість магнітного поля у магнітній системі (рис.1.1) задовольняє наступну систему рівнянь та граничні умови:

$$\operatorname{rot} \vec{H}^+ = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ в } V^+, \quad (1.32)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}^- = \begin{cases} \delta_w, & \text{в } V_w, \\ 0, & \text{в } V^- - V_w, \end{cases} \quad \operatorname{div} \vec{B}^- = 0 \text{ в } V^-, \quad (1.33)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}^- - \vec{H}^+) = 0, \quad \vec{n} \cdot (\vec{B}^- - \vec{B}^+) = 0 \text{ на } S, \quad (1.34)$$

і зменшується до нуля на нескінченності.

Індукція та напруженість магнітного поля зв'язані співвідношеннями

$$\vec{B}^+ = \mu_0 (\vec{H}^+ + \vec{J}^+), \quad \vec{B}^- = \mu_0 \vec{H}^-, \quad (1.35)$$

де \vec{J} – вектор намагніченості.

Вважаючи

$$\rho_M = -\mu_0 \operatorname{div} \vec{J}^+, \quad \sigma_M = \mu_0 (\vec{n} \cdot \vec{J}^+) \quad (1.36)$$

із співвідношень (1.32) – (1.36) знаходимо

$$\operatorname{rot} \vec{H}^+ = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H}^+ = \frac{\rho_M}{\mu_0} \text{ в } V^+, \quad (1.37)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}^- = \begin{cases} \delta_w, & \text{в } V_w, \\ 0, & \text{в } V^- - V_w, \end{cases} \quad \operatorname{div} \vec{H}^- = 0 \text{ в } V^- \quad (1.38)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}^- - \vec{H}^+) = 0, \quad \vec{n} \cdot (\vec{H}^- - \vec{H}^+) = \frac{\sigma_M}{\mu_0} \text{ на } S \quad (1.39)$$

На основі системи рівнянь (1.37) – (1.39) у роботі [52] побудовані ітераційні методи розрахунку магнітних полів у неоднорідних/нелінійних середовищах, що збігаються при будь-якому початковому наближенні. Умови збіжності та оцінки швидкості збіжності інтерпретовані у термінах властивостей середовищ.

Слід відмітити, що у роботі [52] концепція вторинних джерел для розрахунку статичних полів отримує розвиток у напрямку, що полягає у створенні ітераційних методів визначення густини вторинних джерел, структурно спільних для неоднорідних, анізотропних і нелінійних середовищ і збіжних при будь-якому виборі початкового наближення. Для знаходження розподілу векторів поля в нелінійному анізотропному неоднорідному магнетикі пропонується модифікувати ітераційний процес введенням релаксаційного коефіцієнту $0 < \beta < 1$ (там же є оцінки для величини β і аналіз впливу β на швидкість збіжності ітераційного процесу). Наприклад, ітераційний процес для знаходження розподілу намагніченості може мати вигляд:

$$\vec{J}^{(n)}(Q) = (1 - \beta) \cdot \chi \cdot \left(\vec{H}_0(Q) + \frac{1}{4\pi v} \int \frac{3(\vec{r}_{PQ} \vec{J}^{(n-1)}(P)) \vec{r}_{PQ} - \vec{J}^{(n-1)}(P) r_{PQ}^2}{r_{PQ}^5} dV_P \right) + \beta \vec{J}^{(n-1)}(Q), \quad (1.40)$$

де n – номер ітерації; χ – магнітна сприйнятливості матеріалу - нелінійна функція, що залежить від напруженості магнітного поля: $\chi = f(\vec{H})$.

У [138] запропоновано при розрахунку магнітного поля електромагнітних систем замінювати однорідне нелінійне феромагнітне середовище, що заповнює магнітопровід, шматково-однорідним середовищем з постійними значеннями магнітних проникностей у межах кожної області однорідності (для визначення цих значень задається спеціальний ітераційний процес поля лише на межах, що поділяють. Ця методика була застосована до вирішення стаціонарного завдання.

У роботах І. П. Стадника та Д. М. Філіпова [195 – 198] пропонується підхід до вирішення нелінійної задачі розрахунку магнітного поля, заснований на розбитті області феромагнетика на елементарні області, на межах яких розташовані джерела поля – поверхневі струми.

Даний метод, заснований на концепції вторинних джерел, можна

охарактеризувати як той, що займає проміжне положення між методами просторових і граничних інтегральних рівнянь. У ньому, як і в стандартному методі просторових інтегральних рівнянь, область феромагнетика розбивається на елементарні підобласті, однак у результаті зведення джерел поля до поверхневих струмів СЛАУ наводиться до вигляду, характерного для методу граничних інтегральних рівнянь. Таким чином, метод, що розглядається, може бути охарактеризований як метод граничних інтегральних рівнянь на базі векторного потенціалу простого шару струмів з поданням нелінійного неоднорідного феромагнетика у вигляді сукупності нелінійних однорідних феромагнетиків.

У роботі [199] запропоновано вдосконалення підходу до розв'язання задачі розрахунку магнітного поля із насиченим феромагнетиком. Підхід [195 – 198] заснований на заміні нелінійного феромагнітного середовища на кусково-однорідне з джерелами поля у вигляді поверхневих струмів на границях однорідності областей. Удосконалення полягає у застосуванні скалярних джерел замість векторних, що дозволяє скоротити вдвічі кількість невідомих для тривимірної постановки завдання. Здійснено вибір типу скалярних джерел. Обґрунтовано переваги скалярного потенціалу подвійного шару перед скалярним потенціалом простого шару. Потенціал подвійного шару введений особливим чином, дозволяє скомбінувати його з потенціалом простого шару та поєднати їх переваги в одній моделі.

Ідея безпосереднього використання у рівнянні розрахунку поля вектора намагніченості \vec{J} вперше запропонована у роботах [183, 184]. Метод просторових інтегральних рівнянь ґрунтується на інтегральній формулі, що зв'язує напруженість \vec{H} або магнітну індукцію \vec{B} магнітного поля з намагніченістю \vec{J} деталей магнітної системи, тобто із застосуванням наступних формул

$$\vec{H}(Q) = -\frac{1}{4\pi} \left(\int_V \frac{\vec{r}_{PQ} \cdot \text{div}_P \vec{J}(P)}{r_{PQ}^3} dV_P - \oint_S \frac{(\vec{J}(P) \cdot \vec{n}_P) \vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} dS_P \right), \quad (1.41)$$

$$\vec{B}(Q) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_V \frac{[\text{rot}_P \vec{J}(P) \times \vec{r}_{PQ}]}{r_{PQ}^3} dV_P - \oint_S \frac{[(\vec{n}_P \cdot \vec{J}(P)) \vec{r}_{PQ}]}{r_{PQ}^3} dS_P \right) \quad (1.42)$$

без використання ніяких додаткових граничних умов. Тут S – поверхня всіх феромагнітних елементів; V – об'єм всіх феромагнітних елементів; \vec{r}_{PQ} – радіус-вектор, що з'єднує точки інтегрування P і спостереження Q ; \vec{n}_P – зовнішня нормаль до S в точці P .

У [183, 184] запропоновано наступне рівняння

$$\vec{H}(Q) = -\frac{1}{4\pi} \text{grad}_Q \int_V \frac{(\vec{J}(P) \vec{r}_{PQ})}{r_{PQ}^3} dV_P + \vec{H}_0(Q) \quad (1.43)$$

для магнетика, що знаходиться у зовнішньому полі $\vec{H}_0(Q)$. Доповнивши (1.43) співвідношенням, що характеризує середовище

$$\vec{J}(Q) = f(\vec{H}(Q)),$$

приходимо до інтегрального рівняння відносно намагніченості. В роботі [185] показано, що для інтегрального рівняння (1.43) граничні умови для векторів поля виконуються автоматично.

Для нелінійних середовищ необхідно розробляти збіжні ітераційні методи рішення нелінійних рівнянь, тому виведення інтегральних рівнянь саме по собі не є радикальним засобом розрахунку поля. У даному випадку можна розглядати кілька основних підходів до вирішення цієї проблеми. По-перше, це застосування методів, які ґрунтуються на використанні ітераційних процесів знаходження рішення введенням релаксаційного коефіцієнта. По-друге, за рахунок лінеаризації інтегрального рівняння відносно намагніченості. Та третій підхід - за рахунок зміни ядра інтегрального рівняння зі зменшенням його норми.

У роботах [186, 190, 191, 192] на основі рівняння

$$\vec{B}(Q) = \mu_0 \left(\frac{1}{4\pi} \text{rot}_P \text{rot}_P \int_V \frac{\vec{J}(\vec{B}(P))}{r_{PQ}} dV_P + \vec{H}_0(Q) \right) \quad (1.44)$$

пропонується наступний ітераційний процес

$$\vec{B}^{(n+1)}(Q) = \vec{B}^{(n)}(Q) + \alpha \mu_0 \left(-\frac{1}{4\pi} \text{grad}_Q \int_V \vec{J}(\vec{B}^{(n)}(P)) \text{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} dV_P + \vec{H}^\delta(Q) - \vec{H}(\vec{B}^{(n)}(Q)) \right), \quad (1.45)$$

де

$\vec{B}^{(n)}(Q)$, $\vec{B}^{(n+1)}(Q)$ – відповідно n -е і $(n+1)$ -е наближення до розв'язку (1.45);

α – релаксаційний коефіцієнт ітераційного процесу;

V – об'єм феромагнітного магнітопроводу;

$\vec{J}(\vec{B}(P)) = \vec{B}(P) / \mu_0 - \vec{H}(\vec{B}(P))$ – залежність вектора намагніченості від

вектора магнітної індукції в точці P ;

$\vec{H}(\vec{B})$ – залежність напруженості магнітного поля від магнітної індукції у феромагнетику (характеристика намагнічування матеріалу магнітопроводу).

У [191] показано, що вибір $\alpha = 2$ забезпечує збіжність (1.45) при будь-якому початковому наближенні (найкраща збіжність спостерігається при $\alpha = 1,95$); число ітерацій для отримання прийнятної для практичних цілей розв'язку може перевищувати 1000.

У роботі [200] запропонований алгоритм розрахунку магнітної індукції, заснований на ітераційному розв'язанні інтегрального рівняння щодо намагніченості (1.44) з наступною лінеаризацією.

У роботах [104 – 113] розглядається інший підхід до опису рівняння для намагніченості \vec{J} . Наприклад, автором виводиться наступне інтегральне рівняння:

$$\vec{J}(Q) = \lambda \left[2\vec{H}_0(Q) + \int_V K(P, Q) \vec{J}(P) dV_P + \frac{m-2}{m} \vec{J}(Q) \right], \quad (1.46)$$

де

параметр рівняння $\lambda = (\mu - \mu_0) / (\mu + \mu_0)$ – у загальному випадку неоднорідний нелінійний тензор;

K – симетричний тензор другого рангу з компонентами

$$K_{i,j} = \frac{m\alpha_i\alpha_j - \delta_{i,j}}{\pi r_{PQ}^m (m-1)},$$

де m – розмірність області; а α – направляючі косинуси вектора \vec{r}_{PQ} .

Показано, що для інтегрального рівняння (1.46) ітераційний процес знаходження розв'язку збігається без введення релаксаційного фактору. Збіжність досягається фактично за рахунок зміни ядра інтегрального рівняння зі зменшенням його норми.

Висновки до розділу 1

1. Аналіз літературних джерел виявив, що різноманітність електротехнічних і електроенергетичних пристроїв вимагає всебічного дослідження їх передбачуваних техніко-економічних характеристик і властивостей ще до моменту їх виготовлення. Це в свою чергу передбачає на першому етапі математичне моделювання основних характеристик розроблюваних пристроїв з урахуванням як геометричних параметрів так і фізичних властивостей використовуваних при їх проектуванні матеріалів для створення сучасної конкурентоспроможної продукції.

2. Одним з основних і найвідповідальніших етапів процедури математичного моделювання параметрів електротехнічних пристроїв є розрахунок характеристик створюваного ними електромагнітного поля. Для досягнення цієї мети в сучасних умовах найбільш широко застосовуються різні чисельні методи розрахунку електромагнітних полів із застосуванням обчислювальної техніки: метод кінцевих різниць, метод кінцевих елементів, метод інтегральних рівнянь та інші методи.

3. Номінальні режими роботи таких пристроїв реалізуються зазвичай при значеннях магнітної індукції, які не призводять до значного насичення магнітом'яких матеріалів. У цей же час у деяких областях (наприклад, кутові зони, тонкі феромагнітні перекладки) значення магнітної індукції можуть перевищувати допустимі, що вимагає врахування нелінійної залежності $B(H)$ при розрахунку магнітного поля в таких пристроях.

4. На основі методу вторинних джерел крайову задачу розрахунку характеристик магнітного поля з урахуванням нелінійності магнітної характеристики сталі зведено до системи інтегральних рівнянь для фіктивних магнітних зарядів, розташованих по границі та об'єму феромагнітних тіл, що дозволяє суттєво звужує область пошуку невідомих. При цьому у ядра інтегральних рівнянь входить функція $grad \mu$, розрахунок якої ускладняється при чисельному розв'язку цих рівнянь. Перевага методу вторинних джерел у цьому випадку полягає

в тому, що цю функцію можна явно виразити через густину джерел магнітного поля. Це з одного боку суттєво спрощує формування ядер інтегрального рівняння, а з іншого, підвищує точність її розрахунку при переході до скінченновимірного аналогу при чисельному розв'язку системи інтегральних рівнянь.

Посилання [7-200] див. список використаних джерел стор. 137-158.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПРОЦЕСУ В НЕЛІНІЙНИХ ФЕРОМАГНІТНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розроблена математична модель електромагнітних процесів у нелінійних феромагнітних середовищах, в основі якої лежить метод вторинних джерел, що дозволило звести задачу визначення розподілу магнітної проникності у феромагнітних елементах тіл до розв'язання системи інтегральних рівнянь для густини простого шару та густини об'ємних магнітних зарядів. Запропоновано ітераційний метод знаходження магнітної проникності з урахуванням її нелінійної залежності.

2.1 Двовимірна математична модель розрахунку характеристик магнітного поля у нелінійному феромагнітному середовищі

Якщо розміри магнітної системи в одному з трьох просторових напрямків набагато більші ніж у двох інших, то задачу можемо розглядати у двовимірному наближенні.

Виконавши викладки, аналогічні тим, що наведені у першому розділі, приходимо до системи інтегральних рівнянь для знаходження густини магнітних зарядів розподілених по S і L :

$$\sigma(Q) - \frac{\lambda(Q)}{\pi} \oint_L \sigma(M) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} dL_M = \frac{\lambda(Q)}{\pi} \int_S \rho(M) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} dS_M + 2\mu_0 \lambda(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q, \quad Q \in L, \quad (2.1)$$

$$\rho(Q) + \frac{1}{2\pi_s} \int_S \rho(M) \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} dS_M = -\frac{1}{2\pi_L} \oint_L \sigma(M) \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} dL_M - \frac{\mu_0 \vec{H}^{(B)}(Q) \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q)}, \quad Q \in S. \quad (2.2)$$

У рівнянні (2.1) позначено: $\sigma(Q)$ – густина простого шару магнітних

зарядів у точці Q границі L , $\sigma(M)$ – аналогічно в точці M ; $\rho(M)$ – густина об’ємних магнітних зарядів в точці M поверхні S феромагнетику; $\lambda(Q)$ – параметр інтегрального рівняння

$$\lambda(Q) = \frac{\mu(Q) - \mu_0}{\mu(Q) + \mu_0},$$

де $\mu(Q)$ – магнітна проникність у точці Q границі L розділу феромагнетику та зовнішнього простору з магнітною проникністю μ_0 при наближенні до цієї точки з боку феромагнетику; μ_0 – магнітна постійна, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; \vec{r}_{MQ} – радіус-вектор, що спрямований з точки інтегрування M до точки спостереження Q ; \vec{n}_Q – зовнішня до границі феромагнетику нормаль у точці Q ; $\vec{H}^{(B)}(Q)$ – напруженість магнітного поля, що створюють струми провідності та постійні магніти

$$\vec{H}^{(B)}(Q) = \frac{1}{2\pi} \oint_{L_M} \sigma_M(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi} \int_{S_w} \frac{\vec{\delta}_w(M) \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M, \quad (2.3)$$

де $\sigma_M(M)$ – густина простого шару магнітних зарядів, що вводиться на границі L_M однорідно намагнічених постійних магнітів з намагніченістю $\vec{J}(Q)$; $\sigma_M(M) = \vec{J}(Q) \vec{n}_Q$, \vec{n}_Q – зовнішня до границі магнітів нормаль; $\vec{\delta}_w(M)$ – густина струму в провідниках S_w .

У рівнянні (2.2) позначено: $\rho(Q)$ – густина об’ємних магнітних зарядів у точці Q поверхні S ; $\rho(M)$ – аналогічно в точці M ; $\mu(Q)$ – абсолютна магнітна проникність у точці Q феромагнетику; $grad_Q \mu(Q)$ – градієнт від абсолютної магнітної проникності $\mu(Q)$ як функції координат точці Q ; \vec{r}_{MQ} – радіус-вектор, що спрямований із точки інтегрування M до точки спостереження Q ; $\vec{H}^{(B)}(Q)$ – напруженість магнітного поля, що створюють струми провідності та постійні магніти.

Для повної системи інтегральних рівнянь (2.1) – (2.2) справедливою буде теорема [50], за якою дана система для будь-якої диференційованої функції $\mu(Q) > 0$

розв'язується однозначно.

Якщо скористатися додатковою інформацією [50] про те, що

$$\oint_L \sigma(M) dL_M + \int_S \rho(M) dS_M = 0, \quad (2.4)$$

то можна привести систему інтегральних рівнянь (2.1) – (2.2) до виду:

$$\begin{aligned} \sigma(Q) - \frac{1}{\pi_L} \oint_L \sigma(M) \left[\lambda(P) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L_L} \oint_L \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_Q}{r_{MP}^2} dL_P \right] dL_M = \\ = -\frac{1}{\pi_S} \int_S \rho(M) \left[\lambda(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L_L} \oint_L \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P - \frac{\pi}{L} \right] dS_M + \\ + 2\mu_0 \left[\lambda(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q - \frac{1}{L_L} \oint_L \lambda(P) \vec{H}^{(B)}(P) \vec{n}_P dL_P \right], \quad Q \in L, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \rho(Q) + \frac{1}{2\pi_s} \int_S \rho(M) \left[\frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_s} \int_S \frac{\vec{r}_{MP} \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P) r_{MP}^2} dS_P \right] dS_M = \\ = -\frac{1}{2\pi_L} \oint_L \sigma(M) \left[\frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_s} \int_S \frac{\vec{r}_{MP} \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P) r_{MP}^2} dS_P + \frac{2\pi}{S} \right] dL_M - \\ - \mu_0 \left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q) \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q)} - \frac{1}{S_s} \int_S \frac{\vec{H}^{(B)}(P) \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P)} dS_P \right], \quad Q \in S. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Якщо розв'язано систему рівнянь (2.5), (2.6), напруженість магнітного поля знаходиться за виразом

$$\vec{H}(Q) = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint_L \sigma(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi\mu_0 S} \int_S \rho(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M + \vec{H}^{(B)}(Q). \quad (2.7)$$

Запишемо систему рівнянь (2.5), (2.6) у вигляді:

$$\sigma(Q) - \frac{1}{\pi_L} \oint_L \sigma(M) K_1(M, Q) dL_M = \frac{1}{\pi_S} \int_S \rho(M) K_2(M, Q) dS_M + F^\sigma(Q), \quad Q \in L, \quad (2.8)$$

$$\rho(Q) + \frac{1}{2\pi_s} \int_S \rho(M) K_3(M, Q) dS_M = -\frac{1}{2\pi_L} \oint_L \sigma(M) K_4(M, Q) dL_M - F^\rho(Q), \quad Q \in S, \quad (2.9)$$

де

$$K_1(M, Q) = \lambda(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L_L} \int_L \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P, \quad Q, M \in L,$$

$$\begin{aligned}
K_2(M, Q) &= \lambda(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L_L} \int \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P - \frac{\pi}{L}, \quad Q \in L, \quad M \in S, \\
F^\sigma(Q) &= 2\mu_0 \left[\lambda(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q - \frac{1}{L_L} \int \lambda(P) \vec{H}^{(B)}(P) \vec{n}_P dL_P \right], \quad Q \in L, \\
K_3(M, Q) &= \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_S} \int \frac{\vec{r}_{MP} \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P) r_{MP}^2} dS_P, \quad M, Q \in S, \\
K_4(M, Q) &= \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_S} \int \frac{\vec{r}_{MP} \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P) r_{MP}^2} dS_P + \frac{2\pi}{S}, \quad Q \in S, \quad M \in L, \\
F^\rho(Q) &= \mu_0 \left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q) \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q)} - \frac{1}{S_S} \int \frac{\vec{H}^{(B)}(P) \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P)} dS_P \right], \quad Q \in S.
\end{aligned}$$

Система інтегральних рівнянь (2.5), (2.6) розв'язується однозначно, оскільки вона є лише перетвореною системою інтегральних рівнянь (2.1) – (2.2).

Для подальшого аналізу електромагнітних процесів у нелінійних феромагнітних середовищах будемо користуватись цією системою інтегральних рівнянь, тобто задача буде розв'язуватись у двовимірному наближенні.

2.2 Перетворення ядер інтегральних рівнянь для зменшення кількості складових, що містять $\text{grad}_Q \mu(Q)$.

Перетворимо ядра $K_3(M, Q)$ та $K_4(M, Q)$ інтегральних рівнянь таким чином, щоб зменшити кількість складових, які входять до складу ядер, що містять $\text{grad}_P \mu(P)$. Для цього використаємо тотожність Гріна в двовірному випадку [27]:

$$\int_S (\varphi(P) \Delta \psi(P) + \text{grad}_P \varphi(P) \text{grad}_P \psi(P)) dS_P = \int_L \varphi(P) \frac{\partial \psi(P)}{\partial n} dL_P,$$

де $\frac{\partial \psi(P)}{\partial n}$ – похідна за напрямком до зовнішній нормалі до границі L .

Нехай

$$\psi(P) = \ln \frac{1}{r_{PM}}, \quad \varphi(P) = \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0}.$$

Оскільки,

$$\Delta \left(\ln \frac{1}{r_{PM}} \right) = 0,$$

та

$$\text{grad}_P \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) = \frac{\partial}{\partial r_{PM}} \ln \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) \cdot \text{grad}_P r_{PM} = \frac{\vec{r}_{PM}}{r_{PM}^2},$$

а також

$$\text{grad}_P \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} = \frac{\text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P)}, \quad (2.10)$$

тому, отримаємо наступний вираз:

$$\int_S \left(\text{grad}_P \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r_{PM}} \right) dS_P = \int_S \left(\frac{\text{grad}_P \mu(P) \vec{r}_{PM}}{\mu(P) r_{PM}^2} \right) dS_P = - \int_S \left(\frac{\text{grad}_P \mu(P) \vec{r}_{MP}}{\mu(P) r_{MP}^2} \right) dS_P.$$

Для перетворення ядер інтегральних рівнянь розглянемо два випадки:

якщо $M \in S$;

якщо $M \in L$.

Нехай $M \in S$. Розглядаємо точку M , оточимо її окружністю радіусом R_0 з центром у точці M та розглянемо границю функції:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{S-\Delta S} \left(\text{grad}_P \left[\ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \right] \cdot \text{grad}_P \left[\frac{1}{r_{PM}} \right] \right) dS_P &= \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{PM} \vec{n}_P}{r_{PM}^2} dL_P + \lim_{L' \rightarrow 0} \int_{L'} \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{PM} \vec{n}_P}{r_{PM}^2} dL_P = \\ &= \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{PM} \vec{n}_P}{r_{PM}^2} dL_P - \lim_{L' \rightarrow 0} \int_{L'} \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P = \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{PM} \vec{n}_P}{r_{PM}^2} dL_P - \\ &- \lim_{L' \rightarrow 0} \left[\ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \right] \cdot \lim_{L' \rightarrow 0} \int_{L'} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P = \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{PM} \vec{n}_P}{r_{PM}^2} dL_P + \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

де L – границя, що обмежує площу S ; L' – границя, що обмежує площу ΔS .

Тут враховано, що [50]

$$\oint_{L'} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P = \begin{cases} 0, & \text{якщо } P \text{ поза } L, \\ \pi, & \text{якщо } P \text{ на } L, \\ 2\pi, & \text{якщо } P \text{ всередині } L. \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким чином,

$$\int_S \left(\frac{\text{grad}_P \mu(P) \vec{r}_{PM}}{\mu(P) r_{PM}^2} \right) dS_P = \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{PM} \vec{n}_P}{r_{PM}^2} dL_P + 2\pi \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0}, \quad M \in S,$$

або

$$\int_S \left(\frac{\text{grad}_P \mu(P) \vec{r}_{MP}}{\mu(P) r_{MP}^2} \right) dS_P = \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P - 2\pi \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0}, \quad M \in S. \quad (2.12)$$

Нехай $M \in L$, тоді виконавши аналогічні перетворення, отримаємо наступний вираз:

$$\int_S \left(\frac{\text{grad}_P \mu(P) \vec{r}_{MP}}{\mu(P) r_{MP}^2} \right) dS_P = \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P - \pi \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0}, \quad M \in L.$$

Таким чином, ядра $K_3(M, Q)$ та $K_4(M, Q)$ приймають наступний вигляд:

$$K_3(M, Q) = \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_L} \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P + \frac{2\pi}{S} \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0}, \quad (2.13)$$

$$K_4(M, Q) = \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_L} \int_L \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P + \frac{\pi}{S} \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0} + \frac{2\pi}{S}. \quad (2.14)$$

Таким чином, можливий як безпосередній сумісний розв'язок системи інтегральних рівнянь (1.26) – (1.27), (2.4), яка є перевизначеною, або розв'язок перетвореної системи інтегральних рівнянь (2.8), (2.9), але вона має більш складну структуру ядер.

У першому випадку при апроксимації системи інтегральних рівнянь (1.26) – (1.27), (2.4) системою алгебраїчних рівнянь приходимо до перевизначеної системи рівнянь типу $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, яка може бути зведена до системи алгебраїчних рівнянь з квадратною основною матрицею $\mathbf{A}^T \mathbf{AX} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ з наступним її розв'язком відомими методами.

У другому випадку при апроксимації системи інтегральних рівнянь (2.8), (2.9) системою алгебраїчних рівнянь із квадратною основною матрицею і наявності

у лівій частині рівнянь (2.8), (2.9) невідомих $\sigma(Q)$ та $\rho(Q)$ є можливість організувати ітераційний процес розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

2.3 Перетворення функції $grad_Q \mu(Q)$ з урахуванням явного представлення напруженості магнітного поля через густини магнітних зарядів

Розглянемо на прикладі циліндричної системи координат (для інших систем координат викладки аналогічні) спосіб розрахунку $grad_Q \mu(Q)$, що входить до ядер (2.13), (2.14) інтегральних рівнянь. Вважаємо заданим закон $\mu(Q) = \mu(H(Q))$, тоді в циліндричній системі координат запишемо

$$grad_Q \mu(Q) = \frac{\partial \mu}{\partial H} \left[\frac{\partial H(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} \vec{e}_r(Q) + \frac{\partial H(r_Q, \alpha_Q)}{r_Q \partial \alpha_Q} \vec{e}_\alpha(Q) \right], \quad (2.15)$$

де напруженість магнітного поля визначається у такий спосіб

$$\vec{H}(Q) = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi\mu_0 S} \int \rho(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M + \\ + \frac{1}{2\pi} \oint \sigma_J(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi} \int \frac{\vec{\delta}_w(M) \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M. \quad (2.16)$$

У співвідношенні (2.15): r_Q, α_Q – координати точки Q в циліндричній системі координат, $\vec{e}_r(Q)$, $\vec{e}_\alpha(Q)$ – орти в циліндричній системі координат.

Перша складова напруженості магнітного поля (2.16) обумовлена розподілом простого шару магнітних зарядів з густиною $\sigma(M)$ по границі феромагнітних тіл L , друга складова – розподілом простих магнітних зарядів із густиною $\rho(M)$ в перерізі феромагнітних тіл S , третя складова – намагніченістю \vec{J} постійних магнітів (використано зарядову модель для постійних магнітів, яку викладено в підпункті 3.3.1, де на границі постійних магнітів вводиться простий шар магнітних зарядів із густиною $\sigma_J(M) = J_n(M)$), четверта складова – струмами з густиною $\vec{\delta}_w(M)$ у перерізі котушок S_w .

Враховуючи, що модуль напруженості магнітного поля дорівнює

$$H(r_Q, \alpha_Q) = \sqrt{H_r^2(r_Q, \alpha_Q) + H_\alpha^2(r_Q, \alpha_Q)},$$

знаходимо:

$$\frac{\partial H(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{H(r_Q, \alpha_Q)} \left(H_r(r_Q, \alpha_Q) \frac{\partial H_r(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} + H_\alpha(r_Q, \alpha_Q) \frac{\partial H_\alpha(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} \right), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial H(r_Q, \alpha_Q)}{r_Q \partial \alpha_Q} = \frac{1}{r_Q H(r_Q, \alpha_Q)} \left(H_r(r_Q, \alpha_Q) \frac{\partial H_r(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} + H_\alpha(r_Q, \alpha_Q) \frac{\partial H_\alpha(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} \right). \quad (2.18)$$

Знайдемо часткові похідні, що входять у співвідношення (2.17), (2.18), використовуючи явні вирази для напруженості магнітного поля (2.16).

Розглянемо спочатку випадок, коли напруженість магнітного поля розраховується від простого шару магнітних зарядів із густиною $\sigma(M)$ (покомпонентно в циліндричній системі координат):

$$H_r^\sigma(Q) = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma(M) \frac{r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}{r_{MQ}^2} dL_M,$$

$$H_\alpha^\sigma(Q) = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma(M) \frac{r_Q \sin(\alpha_Q - \alpha_M)}{r_{MQ}^2} dL_M, \quad (2.19)$$

де $H_r^\sigma(Q)$, $H_\alpha^\sigma(Q)$ – r - та α -компонента напруженості магнітного поля у точці Q від густини простого шару магнітних зарядів з густиною $\sigma(M)$ в циліндричній системі координат; r_M, α_M – координати точки M в циліндричній системі координат.

Тоді, виконавши нескладні перетворення, знаходимо

$$\frac{\partial H_r^\sigma(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma(M) P_{rr}(Q, M) dL_M, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial H_\alpha^\sigma(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma(M) P_{\alpha r}(Q, M) dL_M, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial H_r^\sigma(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma(M) P_{r\alpha}(Q, M) dL_M, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial H_{\alpha}^{\sigma}(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma(M) P_{\alpha\alpha}(Q, M) dL_M, \quad (2.23)$$

де

$$P_{rr}(M, Q) = -\frac{r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M) + r_M^2 \cos(2(\alpha_Q - \alpha_M))}{r_{MQ}^4},$$

$$P_{\alpha r}(M, Q) = -\frac{2r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) [r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)]}{r_{MQ}^4},$$

$$P_{r\alpha}(M, Q) = \frac{r_M (r_M^2 - r_Q^2) \sin(\alpha_Q - \alpha_M)}{r_{MQ}^4},$$

$$P_{\alpha\alpha}(M, Q) = -\frac{r_M (2r_M r_Q - (r_M^2 + r_Q^2) \cos(\alpha_Q - \alpha_M))}{r_{MQ}^2}.$$

Аналогічні вирази мають відповідні часткові похідні від компонентів напруженості магнітного поля, яке створюється постійними магнітами при заміні їх простим шаром магнітних зарядів з густиною $\sigma_J(M) = J_n(M)$, $J_n(M) = \vec{J}(M) \cdot \vec{n}_M$, тут $\vec{J}(M)$ – намагніченість постійних магнітів; \vec{n}_M – зовнішня нормаль до поверхні постійного магніту:

$$\frac{\partial H_r^J(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi L_M} \oint J_n(M) P_{rr}(Q, M) dL_M,$$

$$\frac{\partial H_{\alpha}^J(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi L_M} \oint J_n(M) P_{\alpha r}(Q, M) dL_M,$$

$$\frac{\partial H_r^J(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi L_M} \oint J_n(M) P_{r\alpha}(Q, M) dL_M,$$

$$\frac{\partial H_{\alpha}^J(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi L_M} \oint J_n(M) P_{\alpha\alpha}(Q, M) dL_M.$$

Також аналогічні вирази мають відповідні часткові похідні від компонентів напруженості магнітного поля, яке створюється об'ємними магнітними зарядами з густиною $\rho(M)$:

$$\frac{\partial H_r^p(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0 s} \int \rho(M) P_{rr}(Q, M) dS_M,$$

$$\frac{\partial H_\alpha^p(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0 s} \int \rho(M) P_{\alpha r}(Q, M) dS_M,$$

$$\frac{\partial H_r^p(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0 s} \int \rho(M) P_{r\alpha}(Q, M) dS_M,$$

$$\frac{\partial H_\alpha^p(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0 s} \int \rho(M) P_{\alpha\alpha}(Q, M) dS_M.$$

Розглянемо тепер випадок, коли напруженість магнітного поля розраховується від струмів котушок з густиною струму $\delta_w(M)$ (покомпонентно в циліндричній системі координат) (рис.2.1):

$$H_r^\delta(Q) = -\frac{1}{2\pi s_w} \int \delta_w(M) \frac{r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M)}{r_{MQ}^2} dS_M,$$

$$H_\alpha^\delta(Q) = \frac{1}{2\pi s_w} \int \delta_w(M) \frac{r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}{r_{MQ}^2} dS_M.$$

Після нескладних перетворень приходимо до виразу виду

$$\frac{\partial H_r^\delta(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = -\frac{1}{2\pi s_w} \int \delta_w(M) P_{\alpha r}(Q, M) dS_M,$$

$$\frac{\partial H_\alpha^\delta(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi s_w} \int \delta_w(M) P_{rr}(Q, M) dS_M,$$

$$\frac{\partial H_r^\delta(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = -\frac{1}{2\pi s_w} \int \delta_w(M) P_{\alpha\alpha}(Q, M) dS_M,$$

$$\frac{\partial H_\alpha^\delta(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi s_w} \int \delta_w(M) P_{r\alpha}(Q, M) dS_M.$$

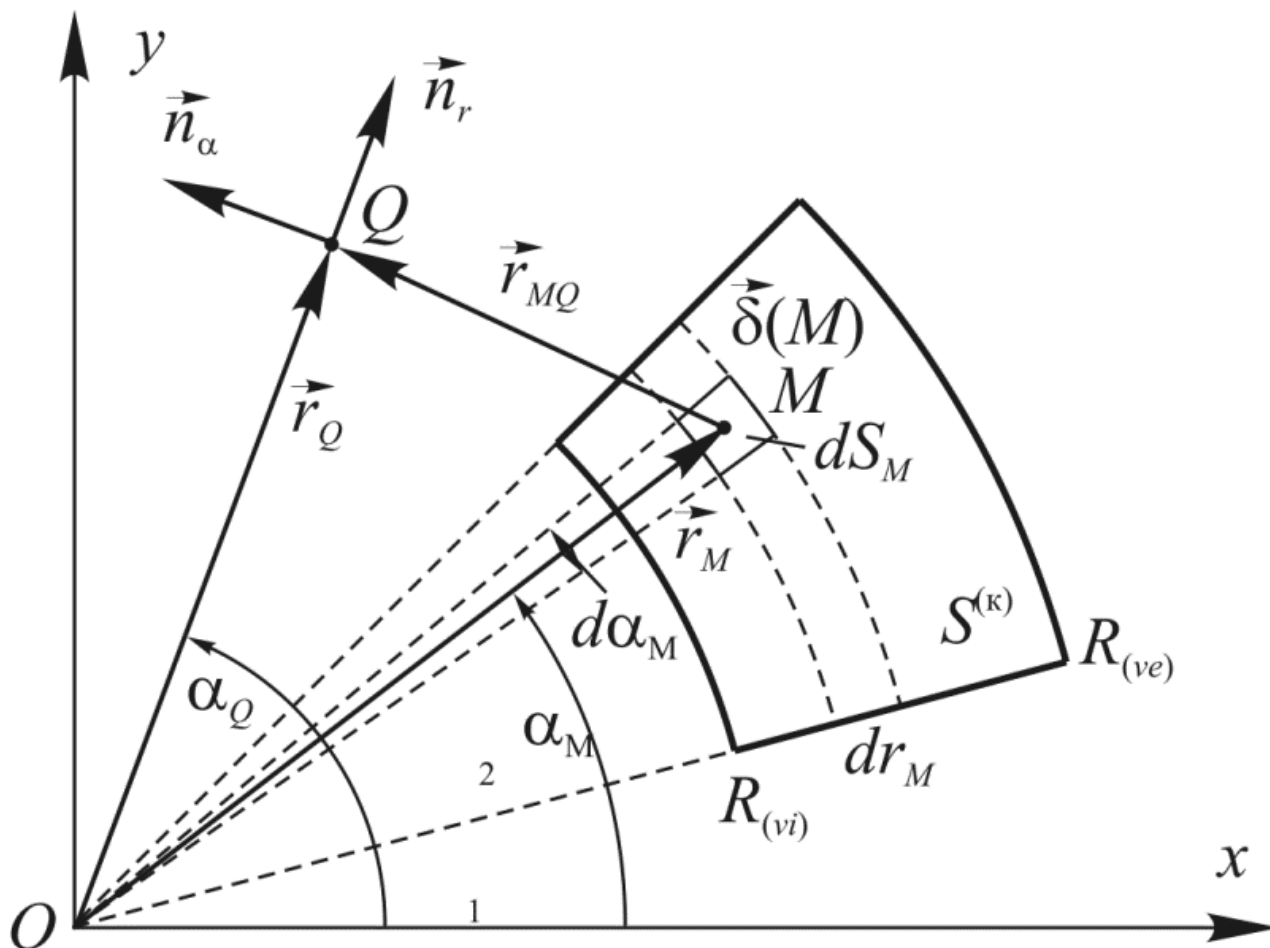


Рис. 2.1 Переріз провідника у формі криволінійної трапеції

Якщо відомо розподіл густини простого шару магнітних зарядів $\sigma(Q)$ на границі феромагнітних тіл L , об'ємної густини магнітних зарядів $\rho(Q)$ у перерізі масивних провідників S , розподіл густини струму $\delta_w(Q)$ в котушках обмотки S_w , намагніченість постійних магнітів \vec{J} , то у відповідності із наведеними вище співвідношеннями можуть бути розраховані часткові похідні (2.17), (2.18) і відповідно функція $grad_Q \mu(Q)$ по формулі (2.15). Враховуючи, що остання функція явно виражається через густини джерел магнітного поля, це з одного боку суттєво спрощує формування ядер інтегрального рівняння (2.9), а з іншого, підвищує точність її розрахунку при переході до скінченновимірному аналогу при чисельному розв'язанні системи рівнянь (2.8), (2.9).

2.4 Ітераційний метод знаходження магнітної проникності з урахуванням нелінійної характеристики залежності $\mu(|\vec{H}|)$

Розв'язання кожного з рівнянь системи (2.8), (2.9) задовольняє умову (2.4). Тому цю систему рівнянь доцільно розв'язувати методом блочної ітерації. При цьому знайдені на кожному кроці значення σ та ρ автоматично задовільняють умову (2.4), що суттєво прискорює процес збіжності ітераційного процесу.

Задача ускладнюється, якщо врахувати нелінійні характеристики властивості феромагнітних елементів у вигляді залежності абсолютної магнітної проникності від модуля напруженості магнітного поля $\mu(|\vec{H}|)$. У цьому випадку процес блочної ітерації можна побудувати наступним чином. Скористаємося системою інтегральних рівнянь (2.8), (2.9) з ядрами (2.13), (2.14) в наближенні неоднорідного середовища.

На першому кроці приймаємо магнітну проникність феромагнітних елементів постійною за всією площею S та близькою до її середнього значення $\mu^{(0)} \approx \mu'_{\text{сеп}}$. При цьому рівняння (2.9) зникає в силу того, що $\text{grad}_Q \mu(Q) = 0$. Далі розв'язуємо рівняння (2.8) з $\lambda(Q) = \text{const}$ та розраховуємо розподіл напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(1)}$ у феромагнітних елементах. Далі, за кривою намагнічування для обраного матеріалу, з якого виконано феромагнітні елементи, знаходимо новий розподіл магнітної проникності $\mu^{(1)}(H^{(1)})$ та розв'язуємо рівняння (2.9). Визначивши розподіл густини магнітних зарядів ρ , розраховуємо новий розподіл напруженості магнітного поля $H^{(2)}$ в феромагнітних елементах та за кривою намагнічування уточнюємо розподіл магнітної проникності $\mu^{(2)}(H^{(2)})$. Знову розв'язуємо рівняння (2.8), попередньо розрахувавши $\lambda(Q)$ за уточненим розподілом $\mu^{(2)}(H^{(2)})$, та т.д.

Таким чином, алгоритм розв'язку нелінійної задачі набуває наступного

вигляду.

Нехай на n -ому ітераційному кроці наближення відомо $\sigma^{(n)}$, $\rho^{(n)}$, $\mu^{(n)}(Q)$, тоді розраховуємо

$$\lambda^{(n+1)}(Q) = \frac{\mu^{(n)}(Q) - \mu_0}{\mu^{(n)}(Q) + \mu_0}.$$

Визначимо ядра і праві частини інтегрального рівняння (2.8) на n -ому ітераційному кроці процесу знаходження розподілу магнітної проникності. Для цього в них замість $\lambda(Q)$ підставляємо $\lambda^{(n)}(Q)$.

$$K_1^{(n+1)}(M, Q) = \lambda^{(n+1)}(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L_L} \int \lambda^{(n+1)}(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P, Q, M \in L,$$

$$K_2^{(n+1)}(M, Q) = \lambda^{(n+1)}(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L_L} \int \lambda^{(n+1)}(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P - \frac{\pi}{L}, Q \in L, M \in S,$$

$$F^{\sigma^{(n+1)}}(Q) = 2\mu_0 \left[\lambda^{(n+1)}(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q - \frac{1}{L_L} \int \lambda^{(n+1)}(P) \vec{H}^{(B)}(P) \vec{n}_P dL_P \right], Q \in L.$$

Далі, знаходимо розподіл $\sigma^{(n)}(Q)$ шляхом розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\sigma^{(n+1)}(Q) - \frac{1}{\pi_L} \oint \sigma^{(n+1)}(M) K_1^{(n+1)}(M, Q) dL_M = -\frac{1}{\pi_S} \int \rho^{(n)}(M) K_2^{(n+1)}(M, Q) dS_M + F^{\sigma^{(n+1)}}(Q), Q \in L, \quad (2.24)$$

Розраховуємо розподіл напруженості магнітного поля $\vec{H}'^{(n)}$ у феромагнітних елементах:

$$\begin{aligned} \vec{H}'^{(n+1)}(Q) = & \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma^{(n+1)}(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi\mu_0 S} \int \rho^{(n)}(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M + \\ & + \frac{1}{2\pi} \oint_{L_M} \sigma_J(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi} \int_{S_w} \frac{\vec{\delta}_w(M) \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M, Q \in S. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Далі, за кривою намагнічування для обраного матеріалу, з якого виконано феромагнітні елементи, знаходимо новий розподіл магнітної проникності

$\mu^{(n+1)}(H^{(n+1)})$, а також розраховуємо $grad_Q \mu(Q)$ за методикою, викладеною в підрозділі 2.3

$$\left[grad_Q \mu(Q) \right]^{(n+1)} = \frac{\partial \mu^{(n+1)}}{\partial H} \left[\frac{\partial H^{(n+1)}(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} \vec{e}_r(Q) + \frac{\partial H^{(n+1)}(r_Q, \alpha_Q)}{r_Q \partial \alpha_Q} \vec{e}_\alpha(Q) \right], Q \in S.$$

Формуємо ядра та праву частину інтегрального рівняння (2.9):

$$K_3^{(n+1)}(M, Q) = \frac{\vec{r}_{MQ} \left[grad_Q \mu(Q) \right]^{(n+1)}}{\mu^{(n+1)}(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_L} \int \ln \frac{\mu^{(n+1)}(P)}{\mu_0} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P + \frac{2\pi}{S} \ln \frac{\mu^{(n+1)}(M)}{\mu_0}, Q, M \in S,$$

$$K_4^{(n+1)}(M, Q) = \frac{\vec{r}_{MQ} \left[grad_Q \mu(Q) \right]^{(n+1)}}{\mu^{(n+1)}(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_L} \int \ln \frac{\mu^{(n+1)}(P)}{\mu_0} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P + \frac{\pi}{S} \ln \frac{\mu^{(n+1)}(M)}{\mu_0} + \frac{2\pi}{S},$$

$$Q \in S, M \in L,$$

$$F^{\rho^{(n+1)}}(Q) = \mu_0 \left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q) \left[grad_Q \mu(Q) \right]^{(n+1)}}{\mu^{(n+1)}(Q)} - \frac{1}{S_S} \int \frac{\vec{H}^{(B)}(P) grad_P \mu^{(n+1)}(P)}{\mu^{(n+1)}(P)} dS_P \right], Q \in S.$$

Розв'язуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\rho^{(n+1)}(Q) + \frac{1}{2\pi_S} \int \rho^{(n+1)}(M) K_3^{(n+1)}(M, Q) dS_M = -\frac{1}{2\pi_L} \oint \sigma^{(n+1)}(M) K_4^{(n+1)}(M, Q) dL_M - F^{\rho^{(n+1)}}(Q),$$

$$Q \in S. \quad (2.26)$$

Визначивши $\rho^{(n+1)}(Q)$, знаходимо уточнений розподіл напруженості магнітного поля на $(n+1)$ -му кроці:

$$\vec{H}^{(n+1)}(Q) = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma^{(n+1)}(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi\mu_0 S} \int \rho^{(n+1)}(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M +$$

$$+ \frac{1}{2\pi L_M} \oint \sigma_J(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi S_w} \int \frac{\vec{\delta}_w(M) \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M, Q \in S. \quad (2.27)$$

За кривою намагнічування для обраного сорту матеріалу, з якого виконано феромагнітні елементи, знаходимо уточнений розподіл магнітної проникності в феромагнітному середовищі:

$$\mu^{(n+1)}(Q) = \mu \left(\left| \vec{H}^{(n+1)}(Q) \right| \right). \quad (2.28)$$

Продовжуючи описаний алгоритм при $n \rightarrow \infty$, приходимо до шуканого розподілу магнітної проникності з урахуванням нелінійності характеристики феромагнітного матеріалу $\mu(\vec{H})$.

Ітераційний процес закінчується по досягненню умови

$$\varepsilon = \max_{\forall Q} \left| 1 - \frac{\mu^{(n)}(Q)}{\mu^{(n+1)}(Q)} \right| \leq \varepsilon_0, \quad (2.29)$$

де ε_0 – задана похибка визначення магнітної проникності в феромагнітному середовищі.

Таким чином, розроблено ітераційний метод знаходження магнітної проникності з урахуванням нелінійної характеристики $\mu(\vec{H})$, в основі якого лежить зведення задачі визначення характеристик магнітного поля до розв'язання системи нелінійних інтегральних рівнянь для густини простого шару і густини об'ємних магнітних зарядів.

2.5 Безколекторний двигун постійного струму з неявнополюсним гладким статором і явнополюсним ротором

Розглянемо безколекторний двигун постійного струму (БДПС) з неявнополюсним гладким статором і явнополюсним ротором (рис. 2.2). Особливістю конструкції представленого БДПС з висококоерцитивними постійними магнітами є наявність тонкої феромагнітної перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором. При номінальному режимі роботи електродвигуна феромагнітний матеріал, з якого її виготовлено, входить у стан магнітного насичення. Це необхідно для суттєвого зниження шунтування магнітного потоку струмів статора і постійних магнітів цими перекладками, магнітна проникливість матеріалу яких наближається до значення магнітної проникливості повітря. Це робить необхідним врахування нелінійних магнітних характеристик матеріалу при розрахунку середнього моменту двигуна представленої конструкції.

Кінцевою метою розрахунку електромагнітного пристрою зазвичай є отримання параметрів схеми заміщення цього пристрою. Якщо такі параметри отримані, то при аналізі даного електромагнітного пристрою можна аналізувати і розраховувати отриману схему заміщення і не повертатися до польових розрахунків.

Отже, статор і ротор електродвигуна є шихтованими та виготовлені з магнітомягкого матеріалу. Статор – це феромагнітна труба, вздовж якої пророблені канали для розташування обмотки (рис. 2.2).

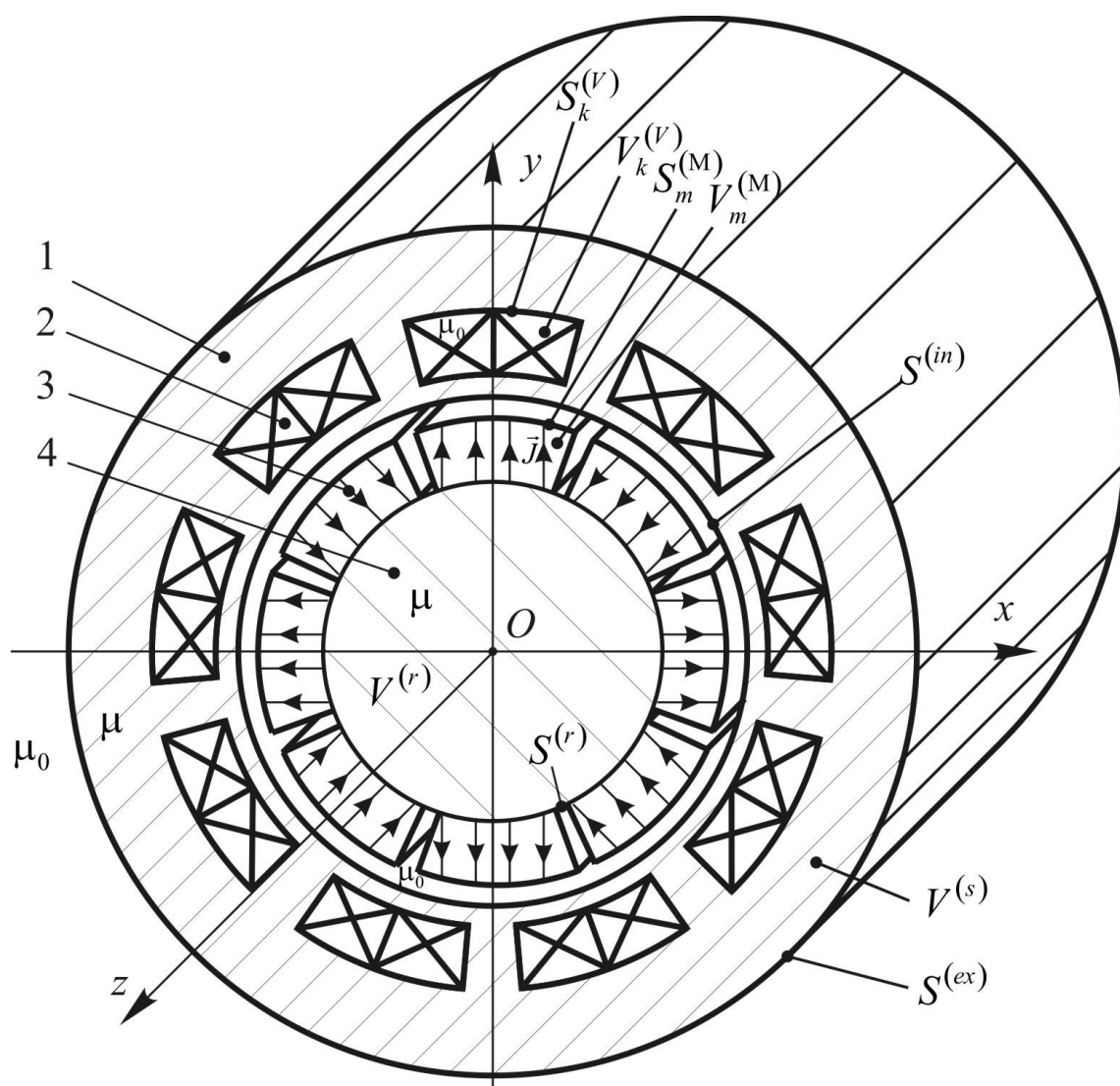


Рис. 2.2 Переріз безконтактного двигуна постійного струму: 1 – статор; 2 – обмотка статора; 3 – постійні однорідно намагнічені магніти; 4 – ротор

Циліндричний ротор розміщений у середині статора. На поверхню ротора

наклеєні постійні магніти, що намагнічені однорідно в площині Oxy вздовж вісі їх симетрії.

Вважаємо, що на обмотки статора БДПС подаються прямокутної форми фазні напруги або струми.

2.6 Двовимірна математична модель розрахунку характеристик магнітного поля у безколекторному двигуні постійного струму

Якщо знехтувати розмірами електричного двигуна вздовж осі z , то задача допускає двовимірне представлення.

Розглянемо $N^{(w)}$ нескінченно довгих паралельних один одному провідника (обмотка статора), по яким течуть струми, що розподілені по перерізу провідників з густиною $\vec{\delta}_m^{(w)}(Q) = \vec{e}_z \delta_m^{(w)}(Q)$, $Q \in S_k^{(w)}$, $k=1,2,\dots,N^{(w)}$, де $S_k^{(w)}$ — переріз k -го провідника, \vec{e}_z — орт циліндричної системи координат, що спрямований за напрямком вісі Oz (рис. 2.3).

Поле, що створюється системою провідників у середовищі з магнітною проникливістю μ_0 визначається за виразом

$$\vec{H}_w^{(b)}(Q) = \sum_{k=1}^{N^{(w)}} \frac{1}{2\pi} \int_{S_k^{(w)}} \delta_k^{(w)}(M) \frac{\vec{e}_z \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M. \quad (2.30)$$

Паралельно провідникам розміщена феромагнітна шихтована труба нескінченної довжини (статор), вздовж якої виконано $N^{(w)}$ каналів нескінченної довжини перерізу $S_k^{(w)}$, $k=1,2,\dots,N^{(w)}$, в які укладається обмотка статора. Нехай $L_k^{(w)}$ — контур, який обмежує $S_k^{(w)}$, а $S^{(s)}$ — переріз труби з каналами, що обмежена контурами $L^{(in)}$ з боку ротору та $L^{(ex)}$ з зовнішнього простору (рис. 2.3).

Всередині труби коаксіально розміщено ротор — нескінченно довгий, шихтований, феромагнітний циліндр, на поверхні якого розташовані однорідно-намагнічені постійні магніти (рис. 2.3). Нехай $S^{(r)}$ — переріз цього циліндра, а $L^{(r)}$ — контур, який обмежує $S^{(r)}$.

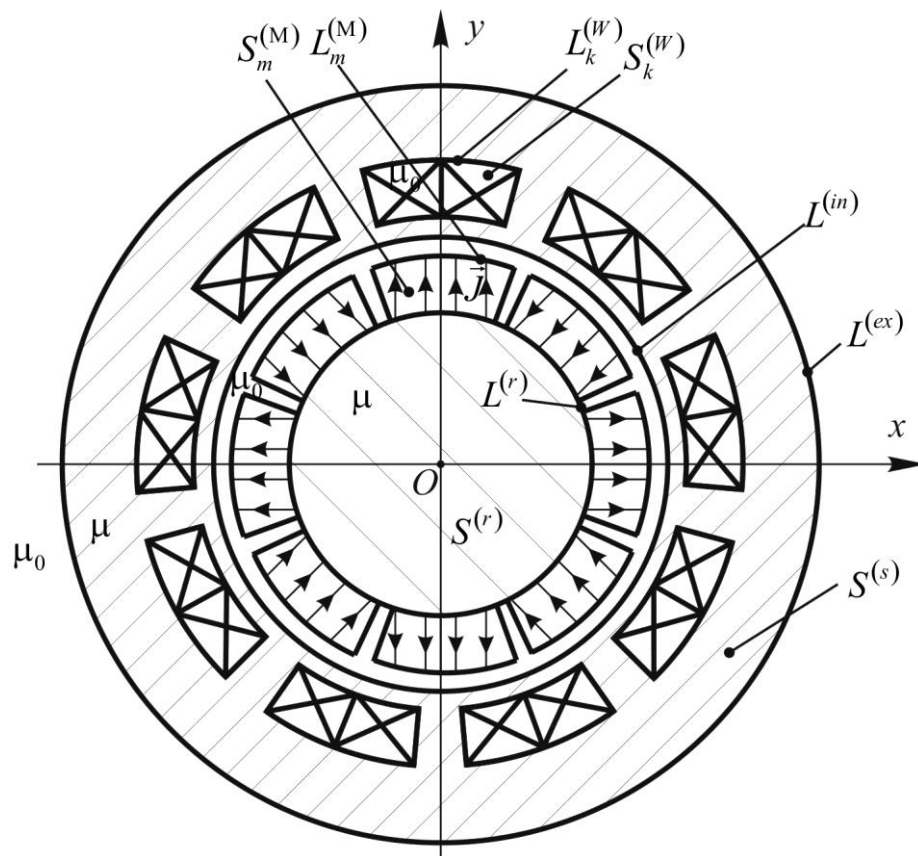


Рис. 2.3 Переріз безколекторного двигуна постійного струму

Введемо позначення:

$$S = S^{(s)} \cup S^{(r)}; \quad L = L^{(r)} \cup L^{(in)} \cup L^{(ex)} \cup \sum_{k=1}^{N^{(w)}} L_k^{(w)}.$$

2.7 Розрахунок магнітного поля струмів обмотки статора безколекторного двигуна постійного струму

Враховуючи те, що в початковій постановці задачі заданою є напруга на обмотках статора, то зміна струму в обмотках статора пов'язана з цією напругою другим законом Кірхгофа:

$$Ri_k(t) + \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = u_k(t), \quad k=1,2,\dots,N^{(w)}, \quad (2.31)$$

де $i_k(t) = \delta_k^{(w)}(t) \Delta S_k^{(w)}$ – миттєвий струм у k -ої обмотці статора, $\delta_k^{(w)}(t)$ – миттєва густина струму в ті ж обмотці; $\Delta S_k^{(w)}$ – площа поперечного перерізу k -ої обмотки статора. Ця система рівнянь доповнює систему рівнянь (2.5) – (2.6), та у сукупності вони дозволять за заданою напругою на котушках обмотки статора розрахувати густину поверхневих та об'ємних магнітних зарядів, а за ними характеристики магнітного поля у БДПС.

Спочатку розрахуємо магнітне поле, що створюється нескінченно довгою котушкою, яка представляє собою два паралельних нескінченно довгих провідника, по яких течуть струми у протилежних напрямках. Визначимо магнітне поле створюване одним із двох провідників, по якому тече струм з постійною густиною $\vec{\delta}(M) = \vec{e}_z \delta_z(M)$ по всьому перерізу провідника, де \vec{e}_z – одиничний орт циліндричної системи координат, $\delta_z(M)$ – z -проекція густини струму в точці M котушки (рис. 2.4).

Введемо циліндричну систему координат таким чином щоб вісь Oz була спрямована вздовж провідника до нас. Магнітне поле, що створено струмом у провіднику, є плоскопаралельним.

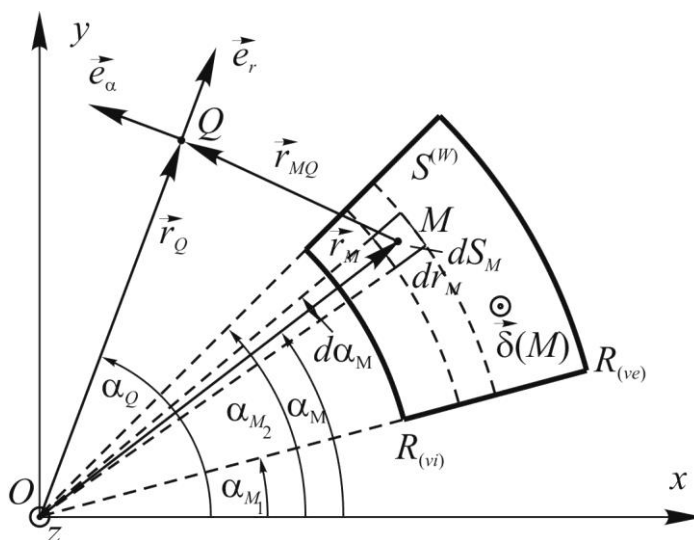


Рис. 2.4 Переріз провідника у формі криволінійної трапеції

Напруженість магнітного поля $d\vec{H}(Q)$, що створює нитка струму $\vec{\delta}(M) dS_M$ у точці Q , визначається виразом [7]:

$$d\vec{H}(Q) = \frac{\delta_z(M)}{2\pi} \frac{\vec{e}_z \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M. \quad (2.32)$$

де \vec{r}_{MQ} – радіус-вектор проведений з точки M у точку Q .

Зважаючи на те, що радіус-вектор \vec{r}_{MQ} можливо представити у вигляді (рис.2.4)

$$dH_\alpha(Q) = \frac{\delta_z(M)}{2\pi} \frac{dS_M}{r_{MQ}^2} (r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)), \quad (2.33)$$

то для визначення напруженості магнітного поля від нитки струму $\vec{\delta}(M)dS_M$ приходимо до виразу:

$$d\vec{H}(Q) = \frac{\delta_z(M)}{2\pi} \left\{ \frac{\vec{e}_z \times \vec{r}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{\vec{e}_z \times \vec{r}_M}{r_{MQ}^2} \right\} dS_M, \quad (2.34)$$

де \vec{r}_M – радіус-вектор проведений з початку координат O у точку M ; \vec{r}_Q – радіус-вектор проведений з початку координат O в точку Q ; \vec{e}_z – одиничний вектор осі Oz ; $\delta_z(M)$ – z -проекція густини струму в точці M перерізу провідника.

Визначимо компоненти напруженості магнітного поля $d\vec{H}(Q)$, тобто $dH_r(Q)$, $dH_\alpha(Q)$ – радіальну і кутову складові.

Оскільки вектор \vec{r}_Q у циліндричній системі координат має компоненти (рис. 2.4)

$$\vec{r}_Q = r_Q \vec{e}_r(Q),$$

а вектор \vec{r}_M – компоненти

$$\vec{r}_M = r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \vec{e}_r(Q) - r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) \vec{e}_\alpha(Q)$$

і тому:

$$\begin{aligned} \vec{e}_z \times \vec{r}_{MQ} &= \vec{e}_z \times \vec{r}_Q - \vec{e}_z \times \vec{r}_M = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_r(Q) & \vec{e}_\alpha(Q) & \vec{e}_z(Q) \\ 0 & 0 & 1 \\ r_Q & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{e}_r(Q) & \vec{e}_\alpha(Q) & \vec{e}_z(Q) \\ 0 & 0 & 1 \\ r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) & -r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) & 0 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_Q \vec{e}_\alpha(Q) - \left(r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) \vec{e}_r(Q) + r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \vec{e}_\alpha(Q) \right) = \\
&= -r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) \vec{e}_r(Q) + \left(r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \right) \vec{e}_\alpha(Q). \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Тому для складових напруженості магнітного поля $d\vec{H}(Q)$, що створює елемент струму $\vec{\delta}(M)dS_M$, отримаємо вирази:

$$dH_r(Q) = -\frac{\delta_z(M)}{2\pi} \frac{dS_M}{r_{MQ}^2} r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M), \quad (2.36)$$

$$dH_\alpha(Q) = \frac{\delta_z(M)}{2\pi} \frac{dS_M}{r_{MQ}^2} \left(r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \right), \quad (2.37)$$

$$r_{MQ} = \left(r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином,

$$dH_r(Q) = -\frac{\delta_z(M)}{2\pi} \frac{r_M^2 dr_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) d\alpha_M}{r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}, \quad (2.38)$$

$$dH_\alpha(Q) = \frac{\delta_z(M)}{2\pi} \frac{\left(r_Q + r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \right) r_M dr_M d\alpha_M}{r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}. \quad (2.39)$$

Напруженість магнітного поля від електричного струму з постійною густиною δ_z , що тече в перерізі $S^{(w)}$ (рис. 2.4), знаходиться шляхом інтегрування виразів (2.38), (2.39) по перерізу провідника $S^{(w)}$:

$$H_r(Q) = \frac{\delta_z}{2\pi} \int_{R_{(vi)}}^{R_{(ve)}} \int_{\alpha_{M_1}}^{\alpha_{M_2}} \frac{r_M^2 dr_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) d\alpha_M}{r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}, \quad (2.40)$$

$$H_\alpha(Q) = \frac{\delta_z}{2\pi} \int_{R_{(vi)}}^{R_{(ve)}} \int_{\alpha_{M_1}}^{\alpha_{M_2}} \frac{\left(r_Q + r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \right) r_M dr_M d\alpha_M}{r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}. \quad (2.41)$$

Записані інтеграли можуть бути знайдені аналітично:

$$\begin{aligned}
H_r(r_Q, \alpha_Q, \alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}) &= h_r(r_Q, \alpha_Q, R_{(ve)}, \alpha_{M_2}) - h_r(r_Q, \alpha_Q, R_{(vi)}, \alpha_{M_2}) - \\
&- h_r(r_Q, \alpha_Q, R_{(ve)}, \alpha_{M_1}) + h_r(r_Q, \alpha_Q, R_{(vi)}, \alpha_{M_1}), \quad (2.42)
\end{aligned}$$

$$H_{\alpha}(r_Q, \alpha_Q, \alpha_{M_1}, \alpha_{M_2}) = h_{\alpha}(r_Q, \alpha_Q, R_{(ve)}, \alpha_{M_2}) - h_{\alpha}(r_Q, \alpha_Q, R_{(vi)}, \alpha_{M_2}) - h_{\alpha}(r_Q, \alpha_Q, R_{(ve)}, \alpha_{M_1}) + h_{\alpha}(r_Q, \alpha_Q, R_{(vi)}, \alpha_{M_1}), \quad (2.43)$$

де

$$h_r(r_Q, \alpha_Q, r_M, \alpha_M) = \frac{\delta_z}{4\pi r_Q} \left\{ \frac{(r_M^2 - r_Q^2 \cos 2(\alpha_M - \alpha_Q))}{2} \ln(r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_M - \alpha_Q)) + r_Q^2 \sin 2(\alpha_M - \alpha_Q) \operatorname{arctg} \frac{r_M - r_Q \cos(\alpha_M - \alpha_Q)}{r_Q \sin(\alpha_M - \alpha_Q)} - r_M r_Q \cos(\alpha_M - \alpha_Q) \right\},$$

$$h_{\alpha}(r_Q, \alpha_Q, r_M, \alpha_M) = \frac{\delta_z}{2\pi} \left[\frac{r_M^2 (\alpha_M - \alpha_Q)}{4r_Q} - \frac{r_M^2}{2r_Q} \operatorname{arctg} \left(\frac{r_M + r_Q}{r_M - r_Q} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_M - \alpha_Q}{2} \right) \right) \right] - \frac{r_M}{2} \sin(\alpha_M - \alpha_Q) - \frac{r_Q \sin[2(\alpha_M - \alpha_Q)]}{4} \cdot \ln(r_M^2 + r_Q^2 - 2r_Q r_M \cdot \cos(\alpha_M - \alpha_Q)) - \frac{r_Q \cos[2(\alpha_M - \alpha_Q)]}{2} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{r_M - r_Q \cos(\alpha_M - \alpha_Q)}{r_Q \sin(\alpha_M - \alpha_Q)} \right).$$

Таким чином визначаються компоненти поля, яке створюється одним провідником зі струмом (рис. 2.4). Але так як котушка обмотки статора складається із двох провідників (рис. 2.5) з перерізами $S_k^{(w)-}$ і $S_k^{(w)+}$, де знаки «-» і «+» вказують відносний напрям струмів у провідниках, $k=1,2,\dots,p_s$, p_s – кількість обмоток статора, тобто полюсне ділення для статора дорівнює $\tau_s = 2\pi/p_s$. Нехай кут між двома половинками обмотки дорівнює $\Delta\tau_s$ (рис. 2.5).

Компоненти напруженості $\vec{H}_k^{(w)}(Q)$ магнітного поля, що створюється струмами k -ої, $k=1,2,\dots,p_s$, котушки в точці Q , визначається наступним чином

$$H_{rk}^{(w)}(r_Q, \alpha_Q) = H_r(r_Q, \alpha_Q, \gamma_k + \Delta\tau_s/2, \gamma_k + \tau_s/2) - H_r(r_Q, \alpha_Q, \gamma_k - \tau_s/2, \gamma_k - \Delta\tau_s/2), \quad (2.44)$$

$$H_{\alpha k}^{(w)}(r_Q, \alpha_Q) = H_{\alpha}(r_Q, \alpha_Q, \gamma_k + \Delta\tau_s/2, \gamma_k + \tau_s/2) - H_{\alpha}(r_Q, \alpha_Q, \gamma_k - \tau_s/2, \gamma_k - \Delta\tau_s/2), \quad (2.45)$$

де γ_k — кут, який визначає лінію симетрії k -ої котушки (рис. 2.5), тобто

$$\gamma_k = \frac{2\pi}{p_s}(k-1) + \gamma_1, \quad k=2,3,\dots,p_s,$$

де γ_1 — кут лінії симетрії першої котушки.

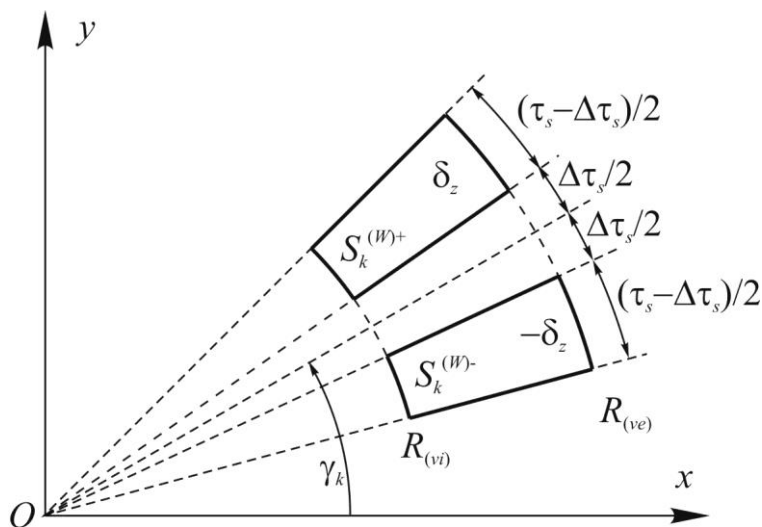


Рис. 2.5 Переріз k -ої котушки обмотки статора

Таким чином, магнітне поле, що створюють обмотки статора (рис. 2.3), у точці Q , дорівнює

$$\vec{H}^{(w)}(r_Q, \alpha_Q) = \sum_{k=1}^{p_s} \vec{H}_k^{(w)}(r_Q, \alpha_Q), \quad (2.46)$$

де компоненти напруженості магнітного поля $\vec{H}_k^{(w)}(r_Q, \alpha_Q)$ визначаються виразами (2.44) та (2.45).

2.8 Магнітне поле постійних однорідно намагнічених магнітів, що наклеєні на гладку поверхню ротора

Для сучасних висококоерцитивних постійних магнітів з великим ступенем точності прийнятне допущення про однорідність намагніченості магніту. Це особливо вірно у випадку, коли магніт намагнічується у однорідному магнітному полі до насичення, і після цього це поле було зняте.

Для розрахунку поля постійних магнітів використовують звичайно одну із двох моделей: зарядову або струмову [139]. У зарядовій моделі розрахунок поля

однорідно намагніченого постійного магніту зводиться до розрахунку поля від поверхневої густини простого шару магнітних зарядів із густиною $\sigma = (\vec{J}, \vec{n})$, у струмовій моделі – до розрахунку поля від поверхневої густини струму із густиною $\vec{j} = [\vec{J}, \vec{n}]$, де \vec{J} – намагніченість постійного магніту; \vec{n} – зовнішня нормаль до границі магніту (рис. 2.6). В електротехнічних обладнаннях постійні магніти звичайно наклеюються на феромагнітну арматуру.

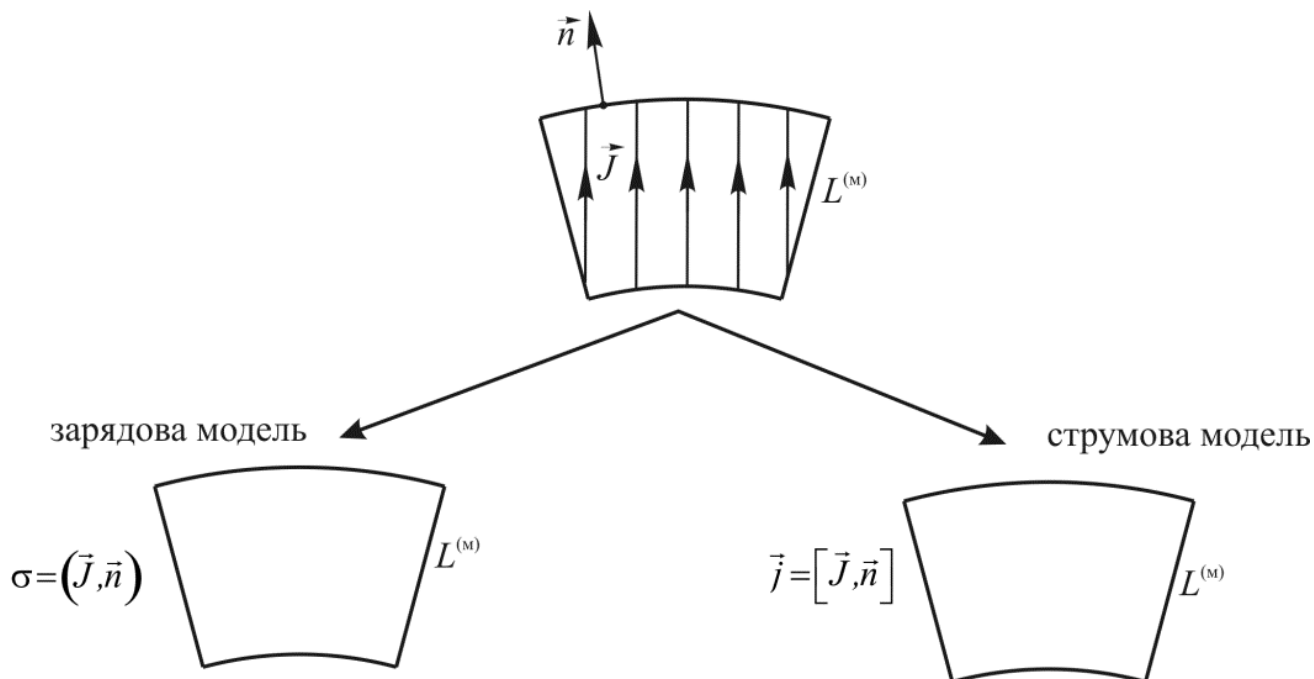


Рис.2.6 Математичні моделі однорідно намагнічених постійних магнітів

На рис. 2.7 наведені приклади елементів таких конструкцій. Якщо в першому випадку (рис. 2.7, а) для розрахунку результуючого поля використовувати зарядову модель, тоді на границі загальної як для феромагнітної арматур, так і для постійного магніту під невідомою густиною простого шару магнітних зарядів, що входять в інтегральне рівняння, доцільно розглядати сумарну густину, тобто

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

де σ_1 й σ_2 – поверхнева густина простого шару магнітних зарядів, обумовлена відповідно заміною постійного магніту з використанням зарядової моделі й наявністю феромагнітної арматури. Для випадку, зображеного на рис. 2.7, б, при

використанні інтегрального рівняння для поверхневої густини струму на границі загальної як для феромагнітної арматури, так і постійного магніту під невідомою поверхневою густиною струму доцільно розглядати сумарну густину.

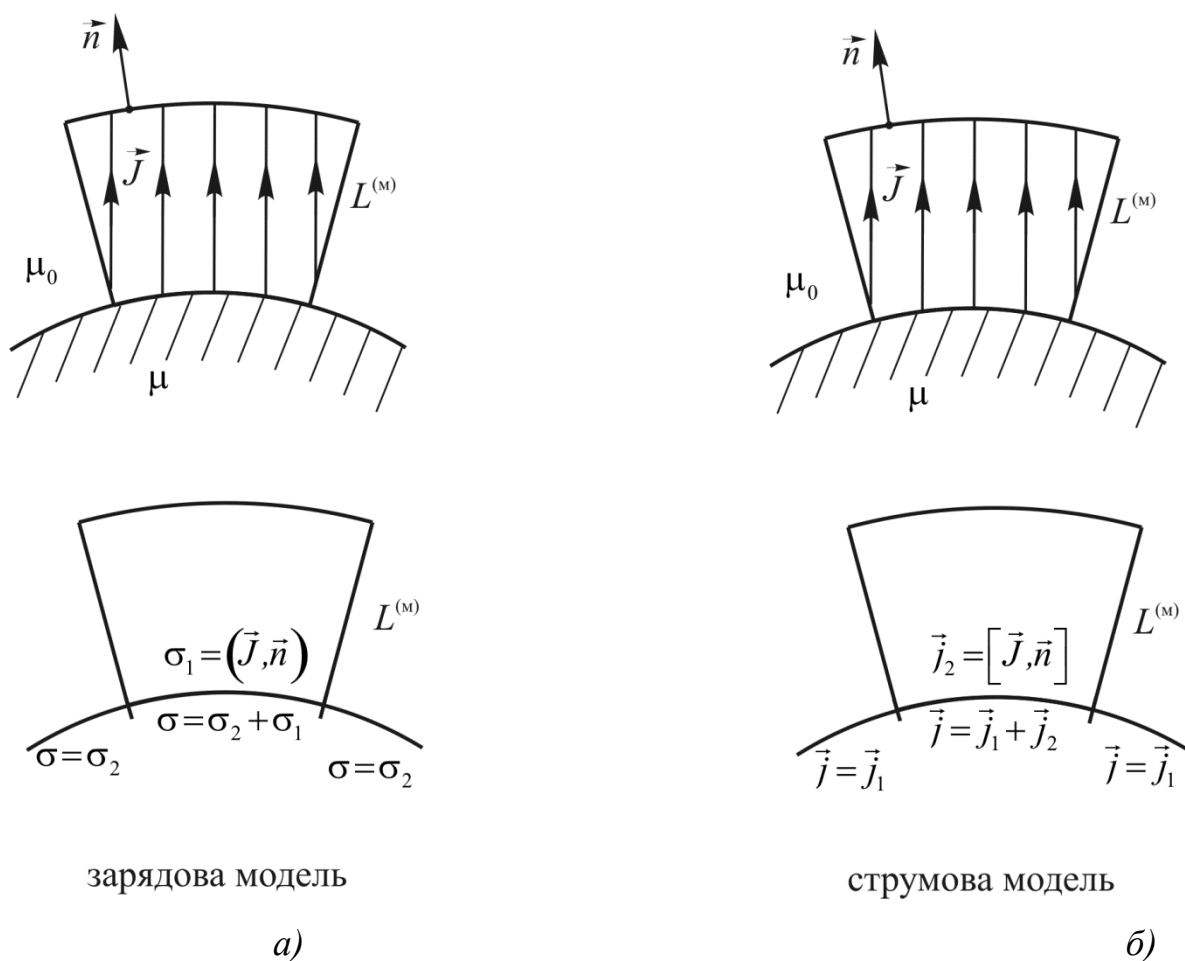


Рис.2.7 Способи кріплення постійних магнітів на феромагнітну арматуру

2.8.1 Зарядова модель постійного магніту

Розрахуємо магнітне поле, що створюють однорідно-намагнічені постійні магніти статору (рис. 2.6).

На рис. 2.8 зображений постійний магніт у формі криволінійної трапеції, однорідно намагнічений вздовж осі своєї симетрії. Вважаємо його нескінченно довгим вздовж напрямку, перпендикулярного площині рисунку. Напруженість магнітного поля у довільній точці Q будемо розраховувати, використовуючи зарядову модель [139], тобто

$$\vec{H}^\sigma(Q) = \frac{1}{2\pi} \oint_{L_M} \frac{\sigma_J(M) \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M, \quad (2.47)$$

де $\sigma_J(M) = J_n(M)$ – поверхнева густина магнітного заряду, яка виражається через нормальну компоненту вектору намагніченості \vec{J} ; \vec{n} – зовнішня нормаль до замкнутої границі L , що обмежує магніт; \vec{r}_{MQ} – вектор, що з'єднує точку інтегрування M і спостереження Q .

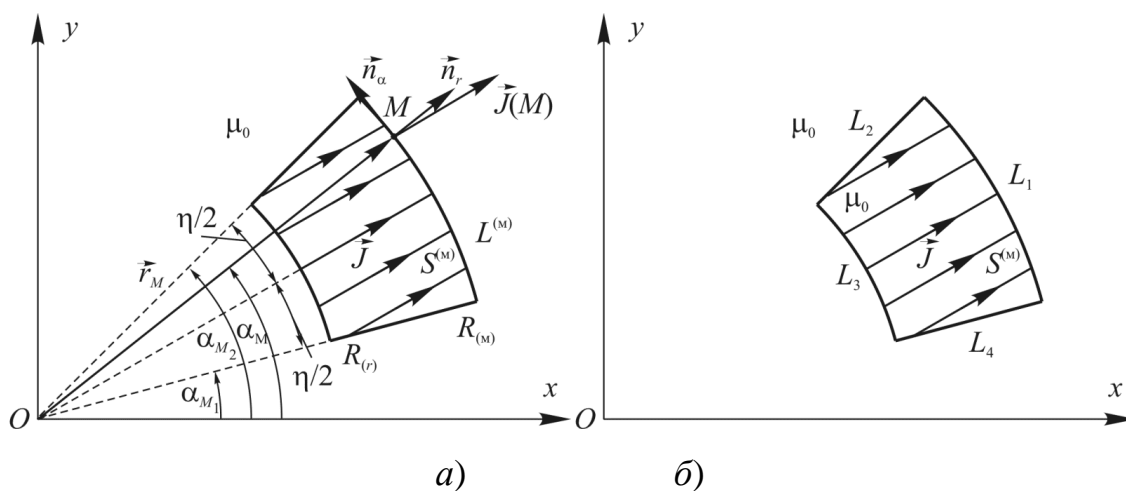


Рис.2.8

У циліндричній системі координат (r, α, z) вектор намагніченості в перерізі постійного магніту очевидно має наступні компоненти:

$$J_r(M) = J \cos(\alpha_M - \gamma),$$

$$J_\alpha(M) = -J \sin(\alpha_M - \gamma),$$

$$J_z(M) = 0.$$

Тоді, для збереження напруженості магнітного поля постійного магніту у всьому просторі замість його намагніченості вводимо на його поверхні простий шар магнітних зарядів з густиною

$$\sigma_J(M) = (\vec{J}(M), \vec{n}_M) = J_r(M) n_r(M) + J_\alpha(M) n_\alpha(M). \quad (2.48)$$

Враховуючи геометрію постійного магніту (рис.2.8, б), густина простого шару магнітних зарядів на кожній стороні постійного магніту визначається наступним чином:

$$\sigma(M) = \begin{cases} J \cos(\alpha_M - \gamma), & M \in L_1; \\ -J \sin(\alpha_M - \gamma), & M \in L_2; \\ -J \cos(\alpha_M - \gamma), & M \in L_3; \\ J \sin(\alpha_M - \gamma), & M \in L_4. \end{cases} \quad (2.49)$$

Розрахуємо компоненти напруженості магнітного поля (2.47) спочатку для випадку, коли $M \in L_1$:

$$H_r^{\sigma L_1}(Q) = \frac{1}{2\pi L_1} \int J \cos(\alpha_M - \gamma) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{e}_r(Q)}{r_{MQ}^2} dL_M, \quad (2.50)$$

$$H_\alpha^{\sigma L_1}(Q) = \frac{1}{2\pi L_1} \int J \cos(\alpha_M - \gamma) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{e}_\alpha(Q)}{r_{MQ}^2} dL_M, \quad (2.51)$$

де $\vec{e}_r(Q)$, $\vec{e}_\alpha(Q)$ – орти циліндричної системи координат у точці Q .

Далі, враховуючи, що

$$\vec{r}_{MQ} \vec{e}_r(Q) = (\vec{r}_Q - \vec{r}_M) \vec{e}_r(Q) = \vec{r}_Q \vec{e}_r(Q) - \vec{r}_M \vec{e}_r(Q) = r_Q - r_M \cos(\alpha_M - \gamma),$$

$$\vec{r}_{MQ} \vec{e}_\alpha(Q) = (\vec{r}_Q - \vec{r}_M) \vec{e}_\alpha(Q) = \vec{r}_Q \vec{e}_\alpha(Q) - \vec{r}_M \vec{e}_\alpha(Q) = r_M \sin(\alpha_M - \gamma),$$

записуємо вирази (2.50), (2.51), враховуючи, що $r_{MQ}^2 = r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)$ та $dL_M = r_M d\alpha_M$ (рис.2.9, а) у вигляді:

$$H_r^{\sigma L_1}(Q) = \frac{J r_M}{2\pi} \int_{\gamma - \frac{\eta}{2}}^{\gamma + \frac{\eta}{2}} \cos(\alpha_M - \gamma) \frac{r_Q - r_M \cos(\alpha_M - \gamma)}{r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)} d\alpha_M, \quad (2.52)$$

$$H_\alpha^{\sigma L_1}(Q) = -\frac{J r_M^2}{2\pi} \int_{\gamma - \frac{\eta}{2}}^{\gamma + \frac{\eta}{2}} \cos(\alpha_M - \gamma) \frac{\sin(\alpha_M - \gamma)}{r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)} d\alpha_M, \quad (2.53)$$

де $\alpha_{M_1} = \gamma + \eta/2$.

Після інтегрування співвідношень (2.52) і (2.53), отримаємо наступні вирази для розрахунку компонент напруженості магнітного поля від поверхневої густини простого шару магнітних зарядів:

$$H_r^{\sigma L_1}(r_Q, \alpha_Q, \gamma) = J \cdot \left[f_{H_r^{\sigma L_1}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(ex)}, \gamma + \frac{\eta}{2}, \gamma \right) - f_{H_r^{\sigma L_1}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(ex)}, \gamma - \frac{\eta}{2}, \gamma \right) \right], \quad (2.54)$$

$$H_\alpha^{\sigma L_1}(r_Q, \alpha_Q, \gamma) = J \cdot \left[f_{H_\alpha^{\sigma L_1}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(ex)}, \gamma + \frac{\eta}{2}, \gamma \right) - f_{H_\alpha^{\sigma L_1}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(ex)}, \gamma - \frac{\eta}{2}, \gamma \right) \right], \quad (2.55)$$

де

$$f_{H_r^{\sigma L_1}}(r_Q, \alpha_Q, r_M, \alpha_M, \gamma) = \frac{1}{8\pi r_Q^2} \left\{ (r_M^2 - r_Q^2) \left[-(\alpha_Q - \alpha_M) \cos(\alpha_Q - \gamma) + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln[r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)] \sin(\alpha_Q - \gamma) \right] + \right. \\ \left. + 2 \sin(\alpha_M - \gamma) r_Q r_M + + 2(r_M^2 + r_Q^2) \left(\arctg \left[\frac{r_M + r_Q}{r_M - r_Q} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_Q - \alpha_M}{2} \right) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \pi \cdot \operatorname{sgn}(\alpha_Q - \alpha_M) \cdot \operatorname{if}(|\alpha_Q - \alpha_M| > \pi, 1, 0) \right) \cos(\alpha_Q - \gamma) \right\},$$

$$f_{H_\alpha^{\sigma L_1}}(r_Q, \alpha_Q, r_M, \alpha_M, \gamma) = -\frac{1}{8\pi r_Q^2} \left\{ (r_M^2 + r_Q^2) \left[(\alpha_Q - \alpha_M) \sin(\alpha_Q - \gamma) + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln[r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)] \cos(\alpha_Q - \gamma) \right] + \right. \\ \left. + 2 \cos(\alpha_M - \gamma) r_Q r_M + + 2(r_Q^2 - r_M^2) \left(\arctg \left[\frac{r_M + r_Q}{r_M - r_Q} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_Q - \alpha_M}{2} \right) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \pi \cdot \operatorname{sgn}(\alpha_Q - \alpha_M) \cdot \operatorname{if}(|\alpha_Q - \alpha_M| > \pi, 1, 0) \right) \sin(\alpha_Q - \gamma) \right\},$$

де $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{if}(x \geq 0, 1, -1)$; функція $\operatorname{if}(\operatorname{cond}, x, y)$ повертає x , якщо cond є істинним (ненульовим), y – в іншому випадку.

Враховуючи те, що кут α_M може змінюватись від 0 до нескінченності (задається частотою обертання ротору), то для коректного користування формулою (2.52) необхідно його перераховувати за виразом:

$$\alpha_M := \alpha_M - 2\pi \cdot \operatorname{floor} \left(\frac{|\alpha_M|}{2\pi} \right),$$

де функція $\operatorname{floor}(z)$ повертає найбільше ціле число менше або рівне z .

$$H_r^{\sigma L_2}(r_Q, \alpha_Q, \gamma) = J \cdot \left[f_{H_r^{\sigma L_2}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(ex)}, \gamma + \frac{\eta}{2}, \gamma \right) - f_{H_r^{\sigma L_2}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(in)}, \gamma + \frac{\eta}{2}, \gamma \right) \right], \quad (2.60)$$

$$H_\alpha^{\sigma L_2}(r_Q, \alpha_Q, \gamma) = J \cdot \left[f_{H_\alpha^{\sigma L_2}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(ex)}, \gamma + \frac{\eta}{2}, \gamma \right) - f_{H_\alpha^{\sigma L_2}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(in)}, \gamma + \frac{\eta}{2}, \gamma \right) \right], \quad (2.61)$$

де

$$\begin{aligned} f_{H_r^{\sigma L_2}}(r_Q, \alpha_Q, r_M, \alpha_M, \gamma) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \ln \left[r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \right] \cos(\alpha_Q - \alpha_M) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \arctg \left[\operatorname{ctg}(\alpha_Q - \alpha_M) - \frac{r_M}{r_Q} \operatorname{cosec}(\alpha_Q - \alpha_M) \right] \sin(\alpha_Q - \alpha_M) \right\} \sin(\alpha_Q - \gamma), \\ f_{H_\alpha^{\sigma L_2}}(r_Q, \alpha_Q, r_M, \alpha_M, \gamma) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -\ln \left[r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \right] \sin(\alpha_Q - \alpha_M) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \arctg \left[\operatorname{ctg}(\alpha_Q - \alpha_M) - \frac{r_M}{r_Q} \operatorname{cosec}(\alpha_Q - \alpha_M) \right] \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \right\} \sin(\alpha_Q - \gamma). \end{aligned}$$

Аналогічні вирази (2.58) і (2.59) можна отримати для L_4 , якщо підставити замість $\alpha_{M_1} = \gamma + \eta/2$ кут $\alpha_{M_2} = \gamma - \eta/2$ і поставити знак « \rightarrow » перед J :

$$H_r^{\sigma L_4}(r_Q, \alpha_Q, \gamma) = -J \cdot \left[f_{H_r^{\sigma L_2}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(ex)}, \gamma - \frac{\eta}{2}, \gamma \right) - f_{H_r^{\sigma L_2}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(in)}, \gamma - \frac{\eta}{2}, \gamma \right) \right], \quad (2.62)$$

$$H_\alpha^{\sigma L_4}(r_Q, \alpha_Q, \gamma) = -J \cdot \left[f_{H_\alpha^{\sigma L_2}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(ex)}, \gamma - \frac{\eta}{2}, \gamma \right) - f_{H_\alpha^{\sigma L_2}} \left(r_Q, \alpha_Q, R_{(in)}, \gamma - \frac{\eta}{2}, \gamma \right) \right]. \quad (2.63)$$

Таким чином, компоненти результуючої напруженості магнітного поля, що створює один однорідно намагнічений постійний магніт, розташування якого здається кутом γ , знаходиться таким чином:

$$H_r^\sigma(r_Q, \alpha_Q, \gamma) = \sum_{m=1}^4 H_r^{\sigma L_m}(r_Q, \alpha_Q, \gamma), \quad (2.64)$$

$$H_\alpha^\sigma(r_Q, \alpha_Q, \gamma) = \sum_{m=1}^4 H_\alpha^{\sigma L_m}(r_Q, \alpha_Q, \gamma). \quad (2.65)$$

Тому можна визначити поле постійних магнітів, яке характеризується напруженістю магнітного поля $\vec{H}^\sigma(Q)$, де $k=1,2,\dots,p_r$, p_r – кількість постійних магнітів, що наклеєні на поверхню ротора:

$$\vec{H}_{\text{mag}}^{\sigma}(r_Q, \alpha_Q) = \sum_{k=1}^{p_r} (-1)^{k-1} \vec{H}^{\sigma}(r_Q, \alpha_Q, \gamma_k), \quad (2.66)$$

де

$$\vec{H}^{\sigma}(r_Q, \alpha_Q, \gamma_k) = H_r^{\sigma}(r_Q, \alpha_Q, \gamma_k) \vec{e}_r(Q) + H_{\alpha}^{\sigma}(r_Q, \alpha_Q, \gamma_k) \vec{e}_{\alpha}(Q). \quad (2.67)$$

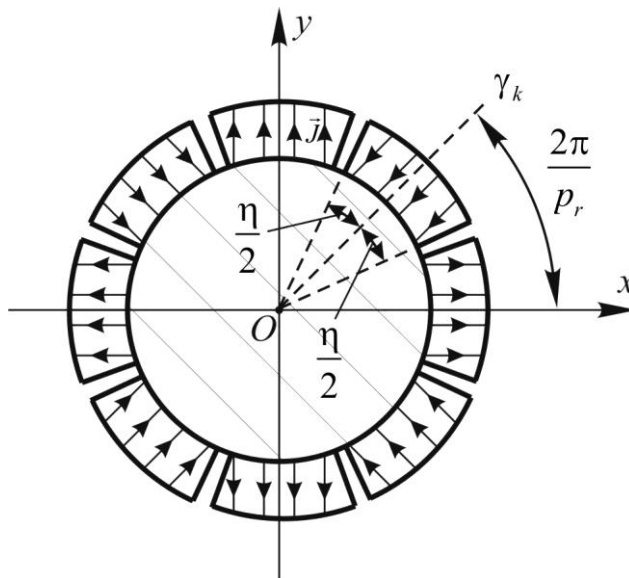


Рис. 2.10 Система постійних магнітів для випадку коли $p_r = 8$

Тут $H_r^{\sigma}(r_Q, \alpha_Q, \gamma)$ та $H_{\alpha}^{\sigma}(r_Q, \alpha_Q, \gamma)$ визначаються виразами (2.64) та (2.65); $\vec{e}_r(Q)$ та $\vec{e}_{\alpha}(Q)$ – орти циліндричної системи координат. При цьому кутову орієнтацію k -го магніту задаємо кутом γ_k (рис. 2.10):

$$\gamma_k = \frac{2\pi}{p_r} (k-1) + \gamma_1, \quad j=2,3,\dots,p_r, \quad (2.68)$$

де γ_1 орієнтація 1-го постійного магніту.

2.8.2 Струмова модель постійного магніту

Розрахуємо магнітне поле, що створюють однорідно намагнічені постійні магніти статора (рис. 2.11).

Відповідно до сформованої раніше концепції намагніченість феромагнітної речовини, якою є постійний магніт, асоціюється з елементарними електричними

мікрострумами в цій речовині. Густина цих струмів позначається $\vec{\delta}_J(M)$, яка визначається з виразу

$$\vec{\delta}_J(M) = \text{rot}_M \vec{J}(M), \quad (2.69)$$

де $\vec{J}(M)$ – намагніченість матеріалу в точці M .

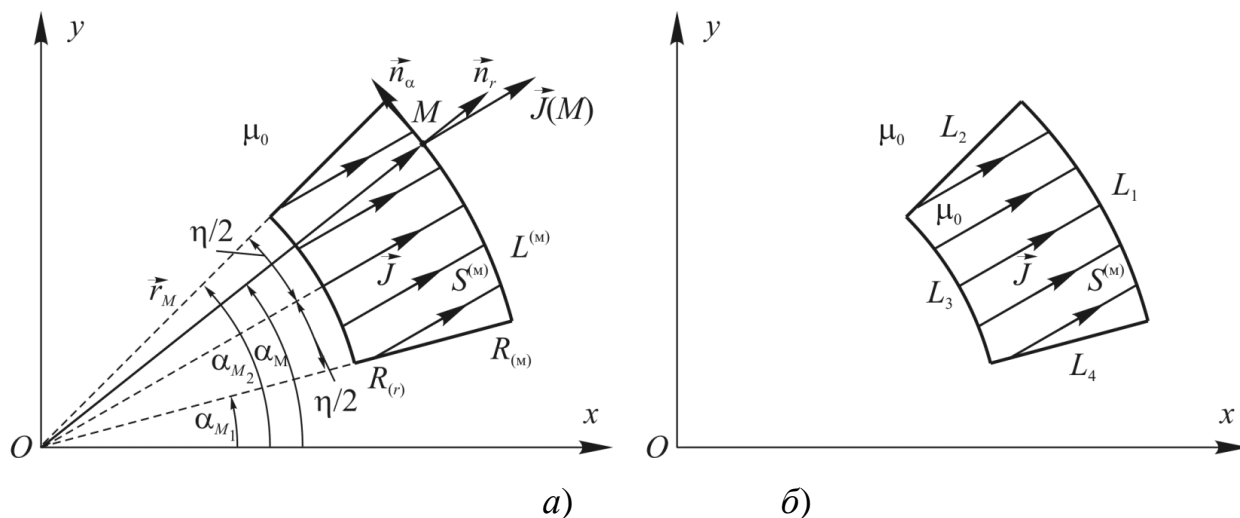


Рис. 2.11

Якщо є поверхня розділу, наприклад, постійний магніт і повітря, то на поверхні розділу з'являються струми з поверхневою густиною $\vec{j}_J(M)$, яка визначається із виразу

$$\vec{j}_J(M) = \vec{J}(M) \times \vec{n}_M, \quad (2.70)$$

де \vec{n}_M – зовнішня нормаль до поверхні постійного магніту.

Останнім часом з'явилися нові магніто-тверді матеріали на основі рідкоземельних елементів, у яких намагніченість падає на 10-15% і тому у постійного магніту розподіл $\vec{J}(M)$ практично не змінюється під дією зовнішнього поля.

Тому якщо задана намагніченість $\vec{J}(M)$, то постійний магніт представимо як систему струмів з об'ємною і поверхневою густиною $\vec{\delta}_J(M)$ і $\vec{j}_J(M)$ відповідно.

У циліндричній системі координат намагніченість $\vec{J}(M)$ має компоненти (рис. 2.11):

$$J_r(M) = J \cos(\alpha_M - \gamma),$$

$$J_\alpha(M) = -J \sin(\alpha_M - \gamma),$$

$$J_z(M) = 0.$$

Тоді в циліндричній системі координат записуємо

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_J(M) = \text{rot}_M \vec{J}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_r(M) & \vec{e}_\alpha(M) & \vec{e}_z(M) \\ \frac{\partial}{\partial r_M} & \frac{\partial}{\partial \alpha_M} & \frac{\partial}{\partial z_M} \\ J_r(M) & J_\alpha(M)r_M & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_z(M) \left(\frac{\partial}{\partial r_M} (-r_M \sin(\alpha_M - \gamma)) - \frac{\partial}{\partial \alpha_M} \cos(\alpha_M - \gamma) \right) \frac{J}{r_M} = 0, \end{aligned} \quad (2.71)$$

тобто

$$\vec{\delta}_J(M) \equiv 0, \quad M \in S^{(M)},$$

де $S^{(M)}$ – поперечний переріз постійного магніту.

Таким чином, мікроструми розподілені тільки по поверхні:

$$\begin{aligned} \vec{j}_J(M) = \vec{J}(M) \times \vec{n}_M &= \begin{vmatrix} \vec{e}_r(M) & \vec{e}_\alpha(M) & \vec{e}_z(M) \\ J_r(M) & J_\alpha(M) & 0 \\ n_r(M) & n_\alpha(M) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= J [n_\alpha(M) \cos(\alpha_M - \gamma) + n_r(M) \sin(\alpha_M - \gamma)] \vec{e}_z(M), \end{aligned} \quad (2.72)$$

де $\vec{n}_M = n_r(M) \vec{e}_r(M) + n_\alpha(M) \vec{e}_\alpha(M)$, $M \in L^{(M)}$.

Тому

$$\vec{j}_J(M) = J [n_\alpha(M) \cos(\alpha_M - \gamma) + n_r(M) \sin(\alpha_M - \gamma)] \vec{e}_z(M), \quad M \in L^{(M)}.$$

Представимо границю постійного магніту в вигляді сукупності чотирьох складових (рис. 2.11):

$$L^{(M)} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4. \quad (2.73)$$

Тоді для поверхневої густини мікрострумів $\vec{j}_J(M)$ запишемо

$$\vec{j}_J(M) = \begin{cases} J \sin(\alpha_M - \gamma) \vec{e}_z(M), M \in L_1, \\ J \cos(\alpha_M - \gamma) \vec{e}_z(M), M \in L_2, \\ -J \sin(\alpha_M - \gamma) \vec{e}_z(M), M \in L_3, \\ -J \cos(\alpha_M - \gamma) \vec{e}_z(M), M \in L_4. \end{cases} \quad (2.74)$$

Таким чином, постійний магніт замінений системою поверхневих струмів у вакуумі.

Для визначення магнітного поля, що задається системою мікрострумів (2.74), скористаємося законом Біо-Савара-Лапласа в диференціальній формі для плоскопаралельного поля

$$d\vec{H}^{(J)}(Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{j}_J(M) \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M, \quad (2.75)$$

де \vec{r}_{MQ} – радіус-вектор проведений з точки M в точку Q ; dL_M – елемент контуру $L^{(M)}$.

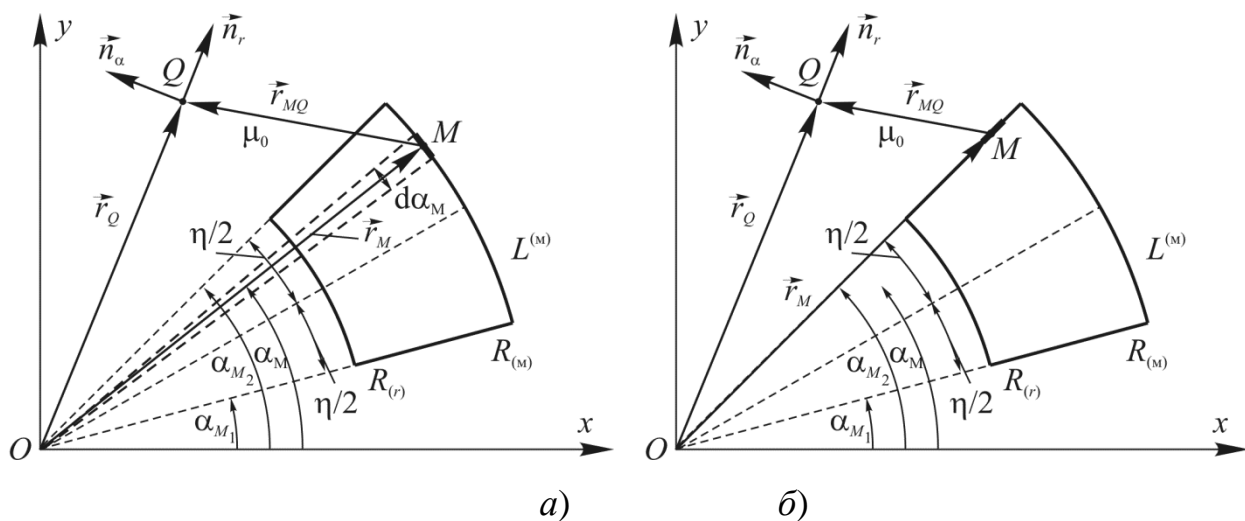


Рис. 2.12

Напруженість магнітного поля від поверхневих струмів на границі L_1 (або L_3) знаходиться так:

$$d\vec{H}_1^{(J)}(Q) = \frac{1}{2\pi} J \sin(\alpha_M - \gamma) \frac{\vec{e}_z(M) \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M, \quad (2.76)$$

при цьому

$$r_{MQ}^2 = r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \text{ и } dL_M = r_M d\alpha_M. \quad (2.77)$$

Оскільки $\vec{r}_{MQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_M$, де \vec{r}_M – радіус-вектор, проведений з початку координат у точку M ; \vec{r}_Q – радіус-вектор, проведений з початку координат у точку Q , тобто

$$\vec{r}_Q = r_Q \vec{e}_r(Q),$$

$$\vec{r}_M = r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M) \vec{e}_r(Q) + r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) \vec{e}_\alpha(Q).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \vec{e}_z(M) \times \vec{r}_{MQ} &= \vec{e}_z(M) \times \vec{r}_Q - \vec{e}_z(M) \times \vec{r}_M = \\ &= -r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) \vec{e}_r(Q) + (r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)) \vec{e}_\alpha(Q), \end{aligned} \quad (2.78)$$

Використовуючи вирази (2.76) – (2.78) для компонент $d\vec{H}_1^{(J)}(Q)$ запишемо

$$dH_{1r}^{(J)}(Q) = -\frac{1}{2\pi} J r_M^2 \frac{\sin(\alpha_M - \gamma) \sin(\alpha_Q - \alpha_M) d\alpha_M}{r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)},$$

$$dH_{1\alpha}^{(J)}(Q) = \frac{1}{2\pi} J r_M \frac{\sin(\alpha_M - \gamma) (r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)) d\alpha_M}{r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)},$$

де $r_M = R_{(M)}$.

Проінтегруємо отримані вирази по куту:

$$H_{1r}^{(J)}(Q) = \int_{L_1} dH_{1r}^{(J)} = -\frac{J r_M^2}{2\pi} \int_{\alpha_{M1}}^{\alpha_{M2}} \frac{\sin(\alpha_M - \gamma) \sin(\alpha_Q - \alpha_M)}{r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)} d\alpha_M, \quad (2.79)$$

$$H_{1\alpha}^{(J)}(Q) = \int_{L_2} dH_{1\alpha}^{(J)} = \frac{J r_M}{2\pi} \int_{\alpha_{M1}}^{\alpha_{M2}} \frac{\sin(\alpha_M - \gamma) (r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M))}{r_M^2 + r_Q^2 - 2r_M r_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_M)} d\alpha_M. \quad (2.80)$$

У результаті приходимо до наступних виразів

$$\begin{aligned} H_{1r}^{(J)}(Q) &= \frac{J}{8\pi r_Q^2} \left[2r_M r_Q \sin(\alpha_M - \gamma) + \right. \\ &+ \left. 2(r_Q^2 - r_M^2) \arctg \left(\frac{r_M + r_Q}{r_M - r_Q} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_M - \alpha_Q}{2} \right) \right) + (r_M^2 + r_Q^2) (\alpha_M - \alpha_Q) \right] \cos(\alpha_Q - \gamma) + \end{aligned}$$

$$+(r_M^2+r_Q^2)\ln(r_M^2+r_Q^2-2r_Mr_Q\cos(\alpha_Q-\alpha_M))\sin(\alpha_Q-\gamma)\Big]_{\alpha_{M_1}}^{\alpha_{M_2}}, \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} H_{1\alpha}^{(J)}(Q) &= \frac{J}{8\pi r_Q^2} \left[-2r_Mr_Q\cos(\alpha_M-\gamma) - \right. \\ &-2(r_M^2+r_Q^2) \left[-\gamma + \arctg\left(\frac{r_M+r_Q}{r_M-r_Q}\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_M-\alpha_Q}{2}\right)\right) \right] \sin(\alpha_Q-\gamma) + \\ &+(r_Q^2-r_M^2)\ln(r_M^2+r_Q^2-2r_Mr_Q\cos(\alpha_Q-\alpha_M))\cos(\alpha_Q-\gamma) + \\ &\left. -\left[r_M^2(\alpha_Q-\alpha_M) + r_Q^2(\alpha_M+\alpha_Q) \right] \sin(\alpha_Q-\gamma) \right]_{\alpha_{M_1}}^{\alpha_{M_2}}. \quad (2.82) \end{aligned}$$

Аналогічні вирази можна отримати для дуги L_3 , якщо в виразах (2.81) і (2.82) підставити $r_M = R_{(r)}$ і підставити знак «-» перед J .

Визначимо поле створюване струмами дуги L_2 (або L_4) (рис. 2.12), якщо

$$\vec{j}_J(Q) = J \cos \frac{\eta}{2} \quad (2.83)$$

і тому

$$d\vec{H}_2^{(J)}(M) = \frac{1}{2\pi} J \cos \frac{\eta}{2} \frac{[\vec{e}_z, \vec{r}_{MQ}]}{r_{MQ}^2} dL_Q, \quad (2.84)$$

де $dL_Q = dr_Q$.

Тому

$$\begin{cases} dH_{2r}^{(J)}(M) = \frac{1}{2\pi} J \cos \frac{\eta}{2} r_Q \sin(\alpha_{M_2} - \alpha) \frac{dr_Q}{(r_M^2 + r_Q^2 - 2r_Mr_Q\cos(\alpha - \alpha_{M_2}))}; \\ dH_{2\alpha}^{(J)}(M) = \frac{1}{2\pi} J \cos \frac{\eta}{2} (r_M - r_Q \cos(\alpha - \alpha_{M_2})) \frac{dr_Q}{(r_M^2 + r_Q^2 - 2r_Mr_Q\cos(\alpha - \alpha_{M_2}))}. \end{cases}$$

Тоді

$$H_{2r}^{(J)}(M) = \int_{L_2} dH_{2r}^{(J)} =$$

$$= \frac{J}{2\pi} \cos \frac{\eta}{2} \sin(\alpha_{M_2} - \alpha) \int_{R(r)}^{R(M)} \frac{r_Q dr_Q}{(r_M^2 + r_Q^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha - \alpha_{M_2}))}. \quad (2.85)$$

Тому

$$H_{2r}^{(J)}(M) = \frac{J}{2\pi} \cos \frac{\eta}{2} \left\{ \sin(\alpha_{M_2} - \alpha) \ln \sqrt{(r_M^2 + r_Q^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha - \alpha_{M_2}))} \Big|_{R(r)}^{R(M)} - \right. \\ \left. - \cos(\alpha - \alpha_{M_2}) \operatorname{arctg} \frac{r_Q - r_M \cos(\alpha - \alpha_{M_2})}{r_M \sin(\alpha - \alpha_{M_2})} \Big|_{R(r)}^{R(M)} \right\}. \quad (2.86)$$

Тоді

$$H_{2\alpha}^{(J)}(M) = \int_{L_2} dH_{\alpha}^{(J)} = \frac{J}{2\pi} \cos \frac{\eta}{2} \int_{R(r)}^{R(M)} \frac{(r_M - r_Q \cos(\alpha - \alpha_{M_2})) dr_Q}{(r_M^2 + r_Q^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha - \alpha_{M_2}))}. \quad (2.87)$$

Тому

$$H_{2\alpha}^{(J)}(M) = \frac{J}{2\pi} \cos \frac{\eta}{2} \left\{ \cos(\alpha - \beta_2) \ln \sqrt{(r_M^2 + r_Q^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha - \alpha_{M_2}))} \Big|_{R(r)}^{R(M)} + \right. \\ \left. + \sin(\alpha - \alpha_{M_2}) \operatorname{arctg} \frac{r_Q - r_M \cos(\alpha - \alpha_{M_2})}{r_M \sin(\alpha - \alpha_{M_2})} \Big|_{R(r)}^{R(M)} \right\}, \quad (2.88)$$

де, $\alpha_{M_2} = \eta + \alpha_{M_1}$.

Аналогічно вираз можна отримати для L_4 , якщо підставити замість α_{M_1} α_{M_2} і поміняти знак «-» перед J .

Тому можна визначити поле постійного магніту, яке характеризується $\vec{H}_j^{(J)}(M)$, де $j=1,2,\dots,8$. При цьому кутову орієнтацію j -го магніту задаємо кутом γ_j , яким можна визначити α_{M_1} і α_{M_2} для j -го магніту, тобто

$$\gamma_j = \frac{\pi}{4}(j-1) + \gamma_0, \quad (2.89)$$

де γ_0 орієнтація 1-го постійного магніту, тоді

$$\begin{cases} \alpha_{M_1} = \gamma_j - \frac{\eta}{2}; \\ \alpha_{M_2} = \gamma_j + \frac{\eta}{2}. \end{cases} \quad (2.90)$$

Тому магнітне поле, що створюється системою постійних магнітів дорівнює

$$\vec{H}^{(j)}(M) = \sum_{j=1}^8 \vec{H}_j^{(j)}(M), \quad (2.91)$$

де $\vec{H}_j^{(j)}(M)$ – поле, яке створюється магнітом з номером j в точці M .

Тому можливо визначити в будь-якій точці поле створюване постійними магнітами.

Поля $\vec{H}^{(K)}(M)$ і $\vec{H}^{(J)}(M)$ утворюють магнітне поле $\vec{H}^{(B)}(M)$ створюване вихровими джерелами (струмами провідності і мікрострумами намагнічування) і тому

$$\vec{H}^{(B)}(M) = \vec{H}^{(K)}(M) + \vec{H}^{(J)}(M). \quad (2.92)$$

2.9 Розрахунок магнітного потоку від постійного магніту у формі циліндру при наявності феромагнетиків

У речовині вирізана нескінченно довга циліндрична площина радіусу R_3 (статор). На її осі розташовані два коаксіальні нескінченно довгі циліндри з радіусами R_1 і R_2 (ротор), причому $R_1 < R_2 < R_3$ (рис. 2.13).

Введемо циліндричну систему координат із центром у точці O , розташованої на осі циліндрів. Простір, що задається умовою $r < R_1$ заповнено феромагнетиком ($\mu = \infty$), умовою $R_1 < r < R_2$ постійним магнітом із заданим вектором намагніченості \vec{J} (система відліку обрана таким чином, щоб вектор \vec{J} був перпендикулярний площині $\alpha = 0$), умовою $R_2 < r < R_3$ – речовиною з проникливістю μ_0 , умовою $r > R_3$ – феромагнетиком ($\mu = \infty$) (рис. 2.13). Позначимо виділені області відповідно I, II, III, IV.

Сформулюємо та розв'яжемо крайову задачу розрахунку магнітного поля однорідно-намагніченого постійного магніту циліндричної форми у феромагнітній порожнині.

Задача полягає у пошуку потоку Φ вектора магнітної індукції \vec{B} через поверхню S'_3 яка (в циліндричній системі координат) задається системою рівнянь (рис.2.13):

$$\begin{cases} r = R_3, \\ 0 \leq \alpha \leq \pi, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (2.93)$$

Потік вектора \vec{B} через S'_3 визначається так [7]:

$$\Phi = \int_{S'_3} \vec{B} d\vec{s}. \quad (2.94)$$

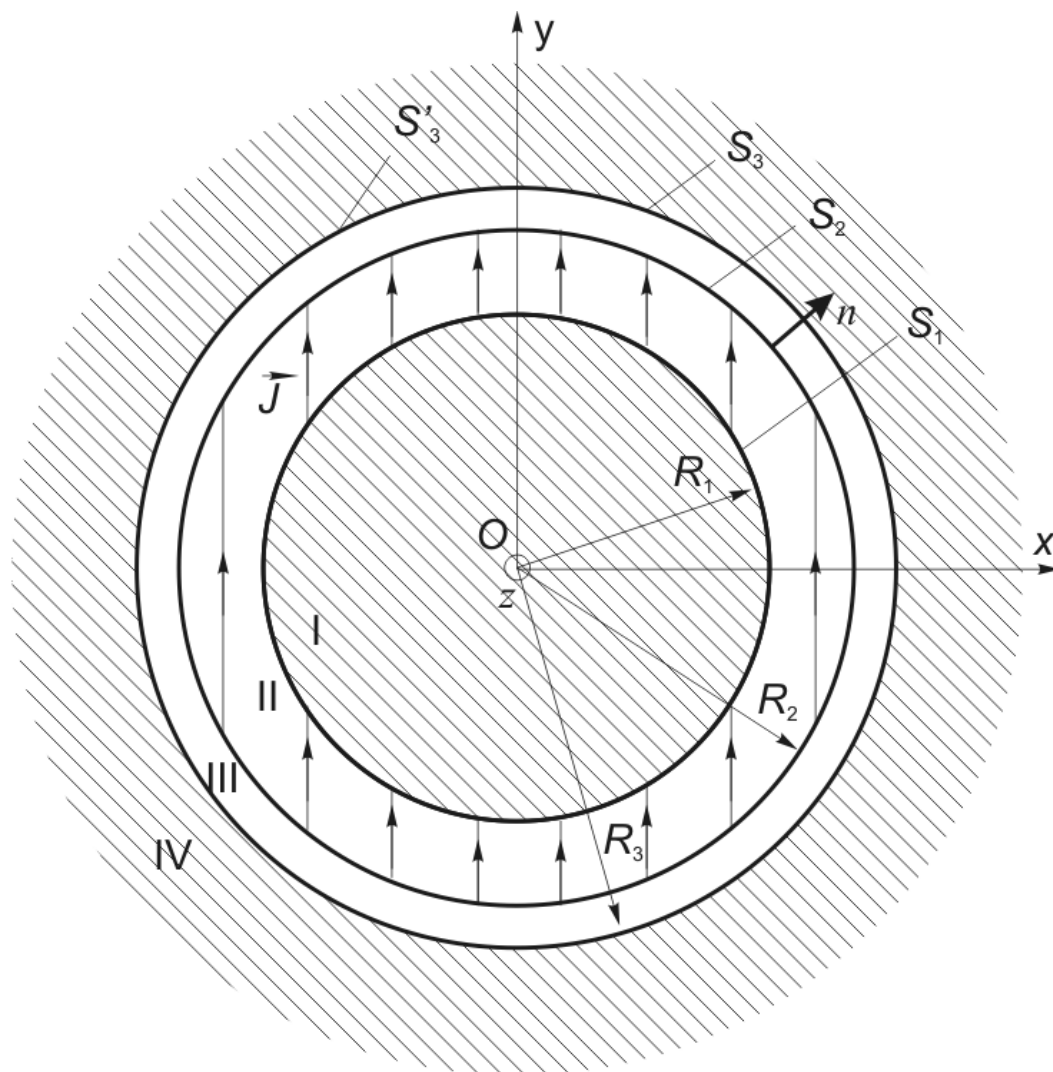


Рис 2.13 Переріз магнітної системи з постійними магнітами

Звідки видно необхідність знання поля \vec{B} на S_3' , або, що те саме, в області III. Знайти його однозначно не знаючи його розподілу в області II не надається можливим через теорему однозначності розв'язності рівнянь Максвелла [7]. Таким чином, задача зводиться до пошуку поля \vec{B} у кільці $R_1 < r < R_3$.

Для розрахунку магнітної індукції скористаємось рівняннями Максвелла, записаними для постійного магнітного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = 0, \quad (2.95)$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad (2.96)$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{J}. \quad (2.97)$$

З першого рівняння цієї системи випливає, що для векторного поля \vec{H} можемо запровадити скалярний магнітний потенціал φ за правилом:

$$\vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi. \quad (2.98)$$

При підстановці співвідношення (2.98) у систему рівнянь (2.95) – (2.97), перше з її рівнянь задовольняється автоматично, та з другого рівняння отримуємо рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (2.99)$$

Запишемо його для кожної з областей II та III:

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad (2.100)$$

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad (2.101)$$

де φ_1 – потенціал в області II, φ_2 – потенціал в області III.

Запишемо граничні умови для скалярного потенціалу φ . В силу принципу безперервності потенціалу на межі поділу двох середовищ маємо:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ на } S_1, \quad (2.102)$$

де S_2 – межа розділу середовищ II і III.

З умови безперервності нормальної складової вектора \vec{B} на межі розділу двох середовищ, маємо:

$$B_{2n} = B_{3n} \text{ на } S_2, \quad (2.103)$$

де B_{1n} , B_{2n} – нормальної компоненти на границі при прагненні до неї відповідно з

другої та третьої областей S_2

Враховуючи рівняння зв'язку (2.97) а також те, що в області III $J=0$, отримуємо:

$$\mu_0 H_{2n} + \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{n} = \mu_0 H_{3n} \text{ на } S_2, \quad (2.104)$$

де \vec{n} – зовнішня до поверхні S_2 нормаль (рис. 2.13).

З (2.98), (2.104) слідує друга гранична умова для скалярного магнітного потенціалу:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\vec{J} \cdot \vec{n}. \quad (2.105)$$

Нехай S_1 – границя між середовищами I та II, S_3 – середовищами III та IV (рис. 2.13). В областях I та IV вважаємо $\mu = \infty$, тобто. напруженість магнітного поля H_1, H_4 , у яких дорівнює нулю:

$$H_1 = H_4 = 0. \quad (2.106)$$

З умови безперервності тангенціальної складової вектора \vec{H} на межі розділу середовищ з різною магнітною проникністю, маємо:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \text{ на } S_1, \quad (2.107)$$

$$H_{3\tau} = H_{4\tau} \text{ на } S_3. \quad (2.108)$$

Але в силу (2.106) і (2.98) отримуємо:

$$\varphi_1 = C_1 \text{ на } S_1, \quad (2.109)$$

$$\varphi_2 = C_2 \text{ на } S_3, \quad (2.110)$$

де C_1 і C_2 – деякі константи.

Розглянемо площину zOx (рис.2.13). Вона буде екіпотенційною внаслідок того, що лінії векторного поля \vec{H} пронизують її під прямим кутом. Таким чином:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = C \text{ на } zOx, \quad (2.111)$$

де C – деяка константа, яку ми можемо прийняти рівною нулю, тобто:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \text{ на } zOx. \quad (2.112)$$

Оскільки площина zOx перетинає поверхні S_1 і S_3 , то з (2.109), (2.110) і (2.112) слідує:

$$\varphi_1 = 0 \text{ на } S_1, \quad (2.113)$$

$$\varphi_2 = 0 \text{ на } S_3. \quad (2.114)$$

Рівняння (2.100), (2.101) плюс граничні умови (2.102), (2.105), (2.113), (2.114) дозволяють однозначно знайти скалярні потенціали φ_1 , φ_2 .

І так маємо наступну крайову задачу

$$\Delta\varphi_1 = 0 \text{ в області II}, \quad (2.115)$$

$$\Delta\varphi_2 = 0 \text{ в області III}, \quad (2.116)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ на } S_2, \quad (2.117)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\vec{J} \cdot \vec{n} \text{ на } S_2, \quad (2.118)$$

$$\varphi_1 = 0 \text{ на } S_1, \quad (2.119)$$

$$\varphi_2 = 0 \text{ на } S_3. \quad (2.120)$$

Розв'яжемо рівняння (2.115) з використанням методу розділу змінних [27]. У циліндричній системі координат рівняння (2.115) має вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (2.121)$$

Зауважимо, що потенціал φ_1 не залежить у даному випадку від z , так як його розподіл однаковий у будь-якій площині, паралельній площині $z=0$. Тобто останній доданок у лівій частині рівняння (2.121) перетворюється в нуль. Рівняння (2.121) набуває вигляду:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha^2} = 0. \quad (2.122)$$

Розв'язання рівняння (2.122) будемо шукати у вигляді

$$\varphi_1 = A(\alpha)R(r), \quad (2.123)$$

де $A(\alpha)$ – залежить тільки від α , $R(r)$ – тільки від r .

Представляємо ймовірний вигляд розв'язку (2.123) у вихідне рівняння (2.122), отримуємо після диференціювання:

$$\frac{1}{r}A(\alpha)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}R(r)\frac{\partial^2 A(\alpha)}{\partial \alpha^2}=0. \quad (2.124)$$

Помножимо обидві частини рівняння (2.124) на $\frac{r^2}{A(\alpha)R(r)}$, отримаємо:

$$\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{A(\alpha)}\frac{\partial^2 A(\alpha)}{\partial \alpha^2}=0. \quad (2.125)$$

Звідки знаходимо:

$$\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)=-\frac{1}{A(\alpha)}\frac{\partial^2 A(\alpha)}{\partial \alpha^2}. \quad (2.126)$$

Зліва в рівнянні (2.126) стоїть функція, яка залежить тільки від r , праворуч - тільки від α . Рівність (2.126) можлива лише тому випадку, якщо обидві вони рівні константі.

Таким чином:

$$\frac{r}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)=k, \quad (2.127)$$

$$-\frac{1}{A(\alpha)}\frac{\partial^2 A(\alpha)}{\partial \alpha^2}=k, \quad (2.128)$$

де k — поки що невідома константа.

Так як $\varphi_1(r, \alpha + 2\pi) = \varphi_1(r, \alpha)$, то $A(r, \alpha + 2\pi) = A(r, \alpha)$. Таким чином із рівняння (2.128), яке можна переписати у вигляді

$$A''(\alpha) + kA(\alpha) = 0, \quad (2.129)$$

знаходимо $\sqrt{k} = n$, де n — ціле число, а

$$A_n(\alpha) = a_n \cos(n\alpha) + b_n \sin(n\alpha). \quad (2.130)$$

Далі, з (2.127), вважаючи $R(r) = r^\lambda$, отримуємо

$$\lambda^2 = n^2, \text{ тобто } \lambda = \pm n, \quad n > 0, \text{ і, отже}$$

$$R_n(r) = ar^n + br^{-n}. \quad (2.131)$$

При $n = 0$ ($k = 0$) з (2.127) знаходимо

$$R_0(r) = C_0 \ln r + C. \quad (2.132)$$

Розв'язання рівняння (2.100) в області $R_1 < r < R_3$ за заданих крайових умов шукаємо у вигляді ряду:

$$\varphi_1(r, \alpha) = a_0 \ln r + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n^+ \sin(n\alpha) + b_n^+ \cos(n\alpha)) + r^{-n} (a_n^- \sin(n\alpha) + b_n^- \cos(n\alpha)). \quad (2.133)$$

Очевидно, розв'язок рівняння (2.101) шукаємо у вигляді:

$$\varphi_2(r, \alpha) = c_0 \ln r + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n^+ \sin(n\alpha) + d_n^+ \cos(n\alpha)) + r^{-n} (c_n^- \sin(n\alpha) + d_n^- \cos(n\alpha)). \quad (2.134)$$

Коефіцієнти $a_0, b_0, a_n^+, b_n^+, a_n^-, b_n^-, c_0, d_0, c_n^+, d_n^+, c_n^-, d_n^-, n=1,2,3,\dots$ визначимо із граничних умов (2.102), (2.105), (2.113), (2.114).

З граничної умови (2.102):

$$\begin{aligned} a_0 \ln R_2 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_2^n (a_n^+ \sin(n\alpha) + b_n^+ \cos(n\alpha)) + R_2^{-n} (a_n^- \sin(n\alpha) + b_n^- \cos(n\alpha)) = \\ = c_0 \ln R_2 + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_2^n (c_n^+ \sin(n\alpha) + d_n^+ \cos(n\alpha)) + R_2^{-n} (c_n^- \sin(n\alpha) + d_n^- \cos(n\alpha)). \end{aligned}$$

Звідки,

$$a_0 \ln R_2 + b_0 = c_0 \ln R_2 + d_0, \quad (2.135)$$

$$R_2^n (a_n^+ - c_n^+) + R_2^{-n} (a_n^- - c_n^-) = 0, n=1,2,3,\dots, \quad (2.136)$$

$$R_2^n (b_n^+ - d_n^+) + R_2^{-n} (b_n^- - d_n^-) = 0, n=1,2,3,\dots \quad (2.137)$$

З рівняння (2.118) знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{c_0 - a_0}{R_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n R_2^{n-1} \left\{ (c_n^+ - a_n^+) \sin(n\alpha) + (d_n^+ - b_n^+) \cos(n\alpha) \right\} + \right. \\ \left. + n R_2^{-n-1} \left\{ (c_n^- - a_n^-) \sin(n\alpha) + (d_n^- - b_n^-) \cos(n\alpha) \right\} \right] = -J \sin \alpha. \quad (2.138) \end{aligned}$$

З останнього рівняння:

$$c_0 = a_0, \quad (2.139)$$

$$n R_2^{n-1} (c_n^+ - a_n^+) - n R_2^{-n-1} (c_n^- - a_n^-) = 0, n=2,3,4,\dots, \quad (2.140)$$

$$R_2^0(c_1^+ - a_1^+) - R_2^{-2}(c_1^- - a_1^-) = -J, \quad (2.141)$$

$$nR_2^{n-1}(d_n^+ - b_n^+) - nR_2^{-n-1}(d_n^- - b_n^-) = 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.142)$$

Умови (2.119), (2.120) відповідно запишуться

$$a_0 \ln R_1 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_1^n (a_n^+ \sin(n\alpha) + b_n^+ \cos(n\alpha)) + R_1^{-n} (a_n^- \sin(n\alpha) + b_n^- \cos(n\alpha)) = 0,$$

$$c_0 \ln R_3 + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_3^n (c_n^+ \sin(n\alpha) + d_n^+ \cos(n\alpha)) + R_3^{-n} (c_n^- \sin(n\alpha) + d_n^- \cos(n\alpha)) = 0.$$

Звідки слідує:

$$a_0 \ln R_1 + b_0 = 0, \quad (2.143)$$

$$R_1^n a_n^+ + R_1^{-n} a_n^- = 0, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.144)$$

$$R_1^n b_n^+ + R_1^{-n} b_n^- = 0, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.145)$$

$$c_0 \ln R_3 + d_0 = 0, \quad (2.146)$$

$$R_3^n c_n^+ + R_3^{-n} c_n^- = 0, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.147)$$

$$R_3^n d_n^+ + R_3^{-n} d_n^- = 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.148)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (2.135) – (2.148) для $n=0$. Маємо:

$$a_0 \ln R_2 + b_0 = c_0 \ln R_2 + d_0, \quad (2.149)$$

$$c_0 = a_0, \quad (2.150)$$

$$a_0 \ln R_1 + b_0 = 0, \quad (2.151)$$

$$c_0 \ln R_3 + d_0 = 0. \quad (2.152)$$

Вочевидь, що це система має тривіальний нульовий розв'язок, тобто

$$a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0.$$

Якщо $n=1$, маємо систему рівнянь:

$$R_1 a_1^+ + R_1^{-1} a_1^- = 0, \quad (2.153)$$

$$R_3 c_1^+ + R_3^{-1} c_1^- = 0, \quad (2.154)$$

$$R_2 (a_1^+ - c_1^+) + R_2^{-1} (a_1^- - c_1^-) = 0, \quad (2.155)$$

$$R_2^0 (c_1^+ - a_1^+) - R_2^{-2} (c_1^- - a_1^-) = -J, \quad (2.156)$$

$$R_1 b_1^+ + R_1^{-1} b_1^- = 0, \quad (2.157)$$

$$R_3 d_1^+ + R_3^{-1} d_1^- = 0, \quad (2.158)$$

$$R_2 (b_1^+ - d_1^+) + R_2^{-1} (b_1^- - d_1^-) = 0, \quad (2.159)$$

$$(d_1^+ - b_1^+) - R_2^{-2} (d_1^- - b_1^-) = 0. \quad (2.160)$$

Складемо (2.159) і (2.160):

$$2(b_1^+ - d_1^+) = 0, \text{ тобто } b_1^+ = d_1^+. \quad (2.161)$$

Підставляючи (2.161) в (2.159) отримаємо:

$$b_1^- = d_1^-. \quad (2.162)$$

Перепишемо (2.157), (2.158) з урахуванням (2.161) і (2.162):

$$R_1 b_1^+ + R_1^{-1} b_1^- = 0, \quad (2.163)$$

$$R_3 b_1^+ + R_3^{-1} b_1^- = 0. \quad (2.164)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (2.163), (2.164) однорідна. Її визначник відмінний від нуля. Отже, вона має тривіальне (нульове) рішення.

Тому,

$$b_1^+ = b_1^- = d_1^+ = d_1^- = 0. \quad (2.165)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (2.153) – (2.156). Віднімемо від рівняння (2.155) рівняння (2.156):

$$a_1^+ - c_1^+ = J/2. \quad (2.166)$$

Складемо рівняння (2.155) і (2.156), отримаємо:

$$a_1^- - c_1^- = -(JR_2^2)/2. \quad (2.167)$$

Враховуючи (2.166) і (2.167) рівняння (2.153), (2.154) запишуться:

$$R_1 a_1^+ + R_1 a_1^- = 0, \quad (2.168)$$

$$R_3 \left(a_1^+ - \frac{J}{2} \right) + \frac{1}{R_3} \left(a_1^- + \frac{JR_2^2}{2} \right) = 0. \quad (2.169)$$

Виражаючи з рівняння (2.168) $a_1^+ = -a_1^-/R_1^2$ і підставляючи рівняння (2.169) отримуємо:

$$R_3 \left(-\frac{1}{R_1^2} a_1^- - \frac{J}{2} \right) + \frac{1}{R_3} \left(a_1^- + \frac{JR_2^2}{2} \right) = 0. \quad (2.170)$$

Далі,

$$a_1^- \left(\frac{1}{R_3} - \frac{R_3}{R_1^2} \right) = -\frac{R_2^2}{2R_3} J + \frac{R_3}{2} J. \quad (2.171)$$

Звідки,

$$a_1^- = -\frac{R_2^2 - R_3^2}{2(R_1^2 - R_3^2)} R_1^2 J. \quad (2.172)$$

Підставляючи (2.172) в (2.168) знайдемо:

$$a_1^+ = \frac{R_2^2 - R_3^2}{2(R_1^2 - R_3^2)} J. \quad (2.173)$$

Зі співвідношень (2.166), (2.173) знаходимо:

$$c_1^+ = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{2(R_3^2 - R_1^2)} J. \quad (2.174)$$

Зі співвідношень (2.167) і (2.172) знаходимо:

$$c_1^- = \frac{R_2^2 - R_1^2}{2(R_3^2 - R_1^2)} R_3^2 J. \quad (2.175)$$

Отже, система (2.153) – (2.160) вирішена.

Якщо $n=2,3,4,\dots$ то для знаходження коефіцієнтів у співвідношеннях (2.133) і (2.134) маємо сукупність систем рівнянь:

$$R_1^n a_n^+ + R_1^{-n} a_n^- = 0, \quad (2.176)$$

$$R_3^n c_n^+ + R_3^{-n} c_n^- = 0, \quad (2.177)$$

$$R_2^n (a_n^+ - c_n^+) + R_2^{-n} (a_n^- - c_n^-) = 0, \quad (2.178)$$

$$nR_2^{n-1} (c_n^+ - a_n^+) - nR_2^{-n-1} (c_n^- - a_n^-) = 0, \quad (2.179)$$

$$R_1^n b_n^+ + R_1^{-n} b_n^- = 0, \quad (2.180)$$

$$R_3^n d_n^+ + R_3^{-n} d_n^- = 0, \quad (2.181)$$

$$R_2^n (b_n^+ - d_n^+) + R_2^{-n} (b_n^- - d_n^-) = 0, \quad (2.182)$$

$$nR_2^{n-1}(d_n^+ - b_n^+) - nR_2^{-n-1}(d_n^- - b_n^-) = 0. \quad (2.183)$$

Кожна із систем (2.176) – (2.179) і (2.180) – (2.183) вирішується аналогічно (2.157) – (2.160) тому

$$a_n^+ = a_n^- = b_n^+ = b_n^- = c_n^+ = c_n^- = d_n^+ = d_n^- = 0, \quad n = 2, 3, 4 \dots \quad (2.184)$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (2.133) і (2.134) отримуємо вирази для потенціалів у областях II та III (рис.2.13):

$$\Phi_1 = \frac{R_3^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_1^2} \frac{J}{2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \sin \alpha, \quad (2.185)$$

$$\Phi_1 = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \frac{J}{2} \left(r - \frac{R_3^2}{r} \right) \sin \alpha. \quad (2.186)$$

Поле \vec{H} в області III визначимо з виразу $\vec{H} = -grad\Phi$. В обраній нами системі координат:

$$-grad\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{\partial\Phi}{r\partial\alpha} \vec{e}_\alpha.$$

Таким чином,

$$\vec{H}_{III} = \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \frac{J}{2} \left[\vec{e}_r \left(1 + \frac{R_3^2}{r^2} \right) \sin \alpha + \vec{e}_\alpha \left(1 - \frac{R_3^2}{r^2} \right) \cos \alpha \right].$$

Магнітний потік через поверхню S_3' , що задається системою рівнянь (2.93):

$$\Phi = \mu_0 \int_{S_3'} \vec{H} d\vec{s}.$$

Враховуючи, що елемент поверхні $d\vec{s} = \vec{e}_r R_3 d\alpha dz$, знаходимо:

$$\Phi = \mu_0 \int_{S_3'} \vec{H} \vec{e}_r R_3 d\alpha dz = -\mu_0 \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \frac{J}{2} 2R_3 \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^l dz.$$

Звідки знаходимо,

$$\Phi = 2J\mu_0 R_3 \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_3^2 - R_1^2}. \quad (2.187)$$

З формули (2.187) слід, що максимальний магнітний потік, при фіксованих

радіусах R_2 , R_3 дорівнює:

$$\Phi_{\max} = 2J\mu_0 \frac{R_2^2}{R_3}. \quad (2.188)$$

З формули (2.188) бачимо, що максимальний магнітний потік Φ_{\max} буде більшим коли відношення R_2/R_3 буде ближче до одиниці, тобто буде меншим зазор між ротором та статором.

Якщо запровадити відносні величини рівностями:

$$R_{10} = \frac{R_1}{R_2}, R_{30} = \frac{R_3}{R_2}, \Phi_0 = \frac{\Phi}{\Phi_{\max}}, \quad (2.189)$$

то формулу (2.187) можна переписати так

$$\Phi_0 = \frac{1 - R_{10}^2}{R_{30}^2 - R_{10}^2} R_{30}^2. \quad (2.190)$$

Графік залежності $\Phi_0(R_{10})$ для випадку, коли $R_2 = 0,095$ м, $R_3 = 0,1$ м наведено на рис. 2.14.

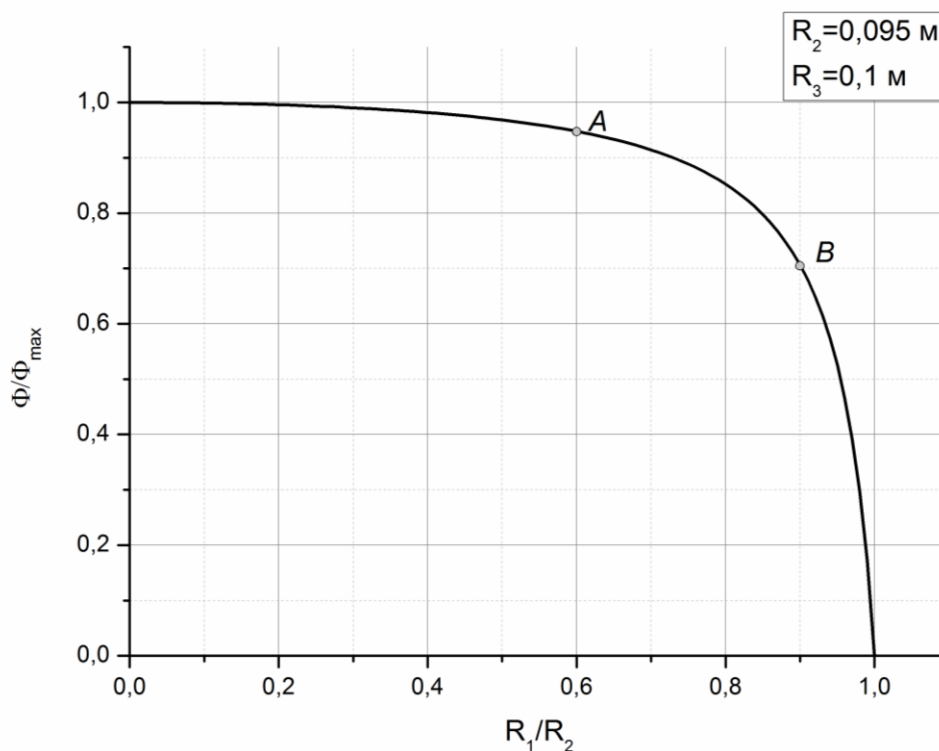


Рис. 2.14 Графік залежності відносного магнітного потоку від радіусу R_1 у відносних одиницях

Для економії постійного магніту внутрішній циліндр ротора може бути

виконаний із сталі. Радіус R_1 повинен бути таким, щоб магнітний потік був ближче до максимального. З рис. 2.14 видно, що цього можна досягти, обравши робочу точку на ділянці AB (у цьому разі потрібно враховувати як вартість магніту, так і сталі). На ньому величина магнітного потоку відрізнятиметься від максимального не більше ніж на 30%, тоді як R_1/R_2 лежить у межах 0,6 – 0,9, тобто. $R_1 = 0,6R_2 \dots 0,9R_2$.

На рис. 2.15 наведено графік залежності $\Phi(R_1)$ для випадку, коли $J = 875352$ А/м (магніти $FeNB$), $R_2 = 0,1$ м, $R_3 = 0,095$ м.

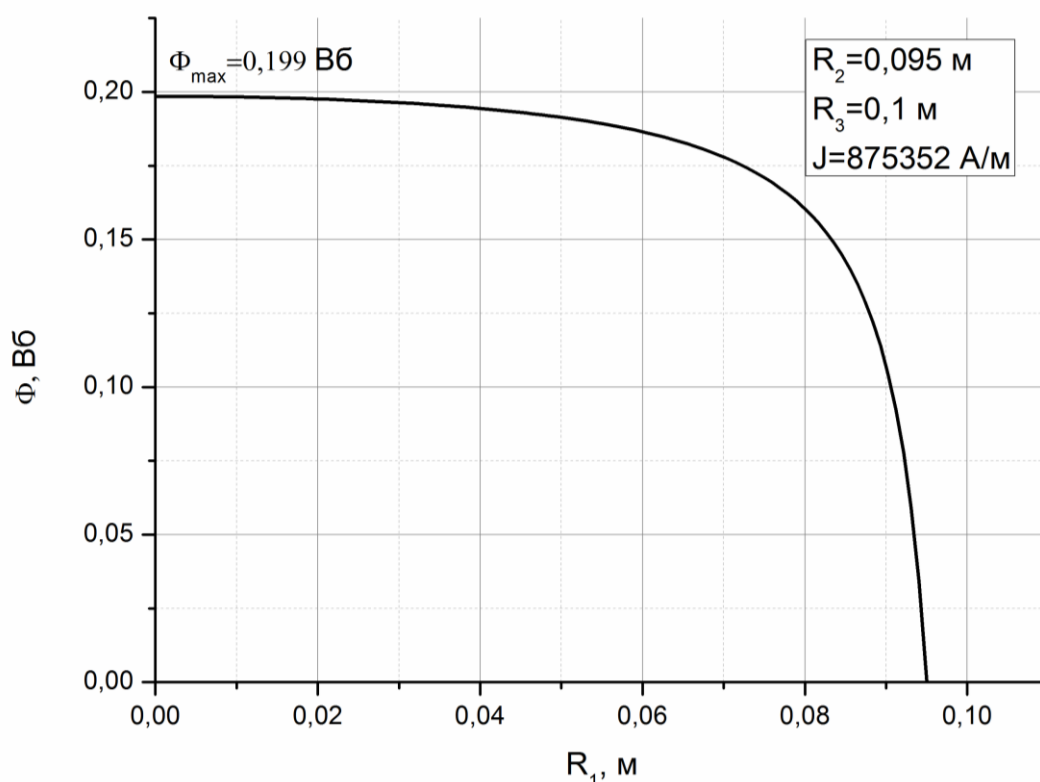


Рис. 2.15 Графік залежності магнітного потоку

Таким чином, розв'язано крайову задачу для скалярного магнітного потенціалу розрахунку магнітного поля постійного однорідно-намагніченого магніту циліндричної форми в площині феромагнетика. Виведено аналітичний вираз для магнітного потоку, що створюється магнітною системою, який дозволив встановити границі зміни внутрішнього радіусу феромагнітної вставки, на поверхні якої розміщені постійні магніти, з умови заданого відхилення магнітного потоку від максимального значення.

Висновки до розділу 2

1. На основі методу вторинних джерел крайова задача розрахунку характеристик магнітного поля у безколекторному двигуні постійного струму з урахуванням нелінійних магнітних властивостей матеріалу зведена до системи інтегральних рівнянь для фіктивних магнітних зарядів, розташованих по границі та об'єму феромагнітних тіл, що дозволяє суттєво звузити область пошуку невідомих.

2. Вдосконалено математичну модель розрахунку компонент магнітного поля у безколекторному двигуні постійного струму з урахуванням нелінійних властивостей феромагнітних матеріалів шляхом спрощення виду ядер інтегральних рівнянь за рахунок зменшення кількості складових, що містять $grad_{\varrho}\mu(Q)$, що дозволяє спростити подальший чисельний розв'язок цих рівнянь.

3. Розроблено методику розрахунку функції $grad_{\varrho}\mu(Q)$ з урахуванням явного представлення напруженості магнітного поля через густини магнітних зарядів, що дозволило процес її апроксимації скінченновимірним аналогом виконати інтегруванням за джерелами поля, що дозволило зменшити похибку її апроксимації на відміну від процедури чисельного диференціювання безпосередньо функції $\mu(Q)$.

4. На підставі безпосереднього інтегрування виразів для компонент напруженості магнітного поля, що створюється системою струмів, які розташовані в пазах у формі криволінійної трапеції, виведено аналітичні формули для їх визначення, що дозволяє усунути похибку чисельного розрахунку поля струмів обмоток статора безколекторного двигуна постійного струму.

5. Розв'язано крайову задачу для скалярного магнітного потенціалу розрахунку магнітного поля постійного однорідно-намагніченого магніту циліндричної форми в площині феромагнетика. Виведено аналітичний вираз для магнітного потоку, що створюється магнітною системою, який дозволив встановити границі зміни внутрішнього радіусу феромагнітної вставки, на поверхні якої розміщені постійні магніти, з умови заданого відхилення магнітного потоку

від максимального значення.

Посилання [7, 27, 50, 139] див. список використаних джерел стор. 137, 139, 141, 152.

РОЗДІЛ 3

**ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО
РОЗРАХУНОКУ ХАРАКТЕРИСТИК МАГНІТНОГО ПОЛЯ У
БЕЗКОЛЕКТОРНОМУ ДВИГУНІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ**

3.1 Апроксимація системи інтегральних рівнянь системою алгебраїчних рівнянь

Розрахунок характеристик магнітного поля в електричному двигуні з урахуванням нелінійності магнітної властивості феромагнітних матеріалів $B=f(H)$ зводиться, як показано у підрозділі 2.4, до системи інтегральних рівнянь для розрахунку густини простого шару магнітних зарядів σ на границі L феромагнітних тіл та густини об'ємних магнітних зарядів ρ в перерізі S феромагнітних тіл:

$$\sigma(Q) - \frac{1}{\pi_L} \oint \sigma(M) K_1(M, Q) dL_M = \frac{1}{\pi_S} \int \rho(M) K_2(M, Q) dS_M + F^\sigma(Q), \quad Q \in L, \quad (3.1)$$

$$\rho(Q) + \frac{1}{2\pi_S} \int \rho(M) K_3(M, Q) dS_M = -\frac{1}{2\pi_L} \oint \sigma(M) K_4(M, Q) dL_M - F^\rho(Q), \quad Q \in S, \quad (3.2)$$

де

$$K_1(M, Q) = \lambda(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L_L} \int \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P,$$

$$K_2(M, Q) = \lambda(Q) \frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} - \frac{1}{L_L} \int \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P - \frac{\pi}{L},$$

$$F^\sigma(Q) = 2\mu_0 \left[\lambda(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q - \frac{1}{L_L} \int \lambda(P) \vec{H}^{(B)}(P) \vec{n}_P dL_P \right],$$

$$K_3(M, Q) = \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_L} \int \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P + \frac{2\pi}{S} \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0},$$

$$K_4(M, Q) = \frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_L} \int \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P + \frac{\pi}{S} \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0} + \frac{2\pi}{S},$$

$$F^p(Q) = \mu_0 \left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q) \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q)} - \frac{1}{S_S} \int_S \frac{\vec{H}^{(B)}(P) \text{grad}_P \mu(P)}{\mu(P)} dS_P \right]. \quad (3.3)$$

де $\sigma(Q)$ – густина простого шару магнітних зарядів у точці Q границі L ; $\rho(Q)$ – густина магнітних зарядів у точці Q поверхні S ; $\lambda(Q) = (\mu(Q) - \mu_0) / (\mu(Q) + \mu_0)$; \vec{r}_{MQ} – радіус-вектор, спрямований з точки інтегрування M до точки спостереження Q ; \vec{n}_Q – нормаль до границі розділу середовищ (феромагнітне тіло – повітря) та спрямовано із феромагнетика в повітря; $\vec{H}^{(B)}(Q)$ – напруженість магнітного поля, що створюють постійні магніти та струми в обмотці статора електродвигуна,

$$\vec{H}^{(B)}(Q) = \frac{1}{2\pi_{L_M}} \oint \frac{\sigma_M(M) \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi_{S_w}} \int \frac{\vec{\delta}_w(M) \times \vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M, \quad (3.4)$$

де $\sigma_M(M)$ – густина простого шару магнітних зарядів, що вводиться на границі однорідно намагнічених постійних магнітів із намагніченістю $\vec{J}(Q)$; $\sigma_M(M) = \vec{J}(Q) \vec{n}_Q$, \vec{n}_Q – зовнішня до границі магнітів нормаль; $\text{grad}_Q \mu(Q)$ – градієнт магнітної проникності, $\mu(Q) = B(H(Q)) / H(Q)$ – магнітна проникність, що розраховується з використанням залежності $B = f(H)$; μ_0 – магнітна постійна, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Якщо розв'язано систему рівнянь (3.1), (3.2) напруженість магнітного поля знаходиться за виразом

$$\vec{H}(Q) = \frac{1}{2\pi\mu_0 L} \oint \sigma(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dL_M + \frac{1}{2\pi\mu_0 S} \int \rho(M) \frac{\vec{r}_{MQ}}{r_{MQ}^2} dS_M + \vec{H}^{(B)}(Q). \quad (3.5)$$

Для чисельного розв'язання системи інтегральних рівнянь (3.1), (3.2) розбиваємо границю L феромагнітних тіл на N_L елементарних ділянок ΔL_i , $i=1,2,\dots,N_L$, а самі феромагнітні тіла на N_S елементарних площ ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$. Для шуканих величин – густини простого шару магнітних зарядів і об'ємної густини магнітних зарядів – використовуємо кусково-постійну апроксимацію.

У результаті цього рівняння (3.1), (3.2) апроксимуються системою

алгебраїчних рівнянь:

$$\sigma_i - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j \int_{\Delta L_j} K_1(M, Q_i) dL_M - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_D} \rho_j \int_{\Delta S_j} K_2(M, Q_i) dS_M = F^\sigma(Q_i), \quad i=1,2,\dots,N_L, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j \int_{\Delta L_j} K_4(M, Q_i) dL_M + \rho_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_D} \rho_j \int_{\Delta S_j} K_3(M, Q_i) dS_M = -F^\rho(Q_i), \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad (3.7)$$

де σ_i – значення густини простого шару магнітних зарядів у центральній точці Q_i елементарної ділянки $\Delta L_i, i=1,2,\dots,N_L$, на які розбивається границя L феромагнітних тіл; σ_j – аналогічно в точці $Q_j, j=1,2,\dots,N_L$; ρ_i – об'ємна густина магнітних зарядів у центральній точці Q_i елементарній площі $\Delta S_j, j=1,2,\dots,N_S$, на які розбивається переріз феромагнітних тіл S ; ρ_j – аналогічно в точці $Q_j, j=1,2,\dots,N_S$.

Розглянемо апроксимацію ядер інтегральних рівнянь (3.6), (3.7) та правої частини.

3.1.1 Апроксимація ядра $K_1(M, Q)$ скінченновимірним аналогом

Враховуючи, що скалярний добуток $\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q$ в обраній циліндричній системі координат представляється у вигляді

$$\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q = [r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)] n_r(Q) - r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) n_\alpha(Q),$$

то відповідний вираз, що входить у підінтегральну функцію рівняння (3.1) набуває вигляд

$$\frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} = \frac{[r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)] n_r(Q) - r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M) n_\alpha(Q)}{r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}, \quad (3.8)$$

де $n_r(Q), n_\alpha(Q)$ – компоненти нормалі \vec{n}_Q в циліндричній системі координат; r_Q, α_Q – координати точки Q у ті ж системі координат; r_M, α_M – те саме для точки M .

Якщо ввести позначення

$$h_r(M, Q) = h_r(r_M, \alpha_M, r_Q, \alpha_Q) = \frac{r_Q - r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}{r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}, \quad (3.9)$$

$$h_\alpha(M, Q) = h_\alpha(r_M, \alpha_M, r_Q, \alpha_Q) = \frac{-r_M \sin(\alpha_Q - \alpha_M)}{r_Q^2 + r_M^2 - 2r_Q r_M \cos(\alpha_Q - \alpha_M)}, \quad (3.10)$$

співвідношення (3.8) можемо переписати у вигляді

$$\frac{\vec{r}_{MQ} \vec{n}_Q}{r_{MQ}^2} = h_r(M, Q) n_r(Q) + h_\alpha(M, Q) n_\alpha(Q). \quad (3.11)$$

Для формування скінченновимірного аналога для ядра $K_1(M, Q)$ запишемо

$$\begin{aligned} \int_{\Delta L_j} K_1(M, Q_i) dL_M &= \int_{\Delta L_j} \left(\lambda(Q) \frac{\vec{r}_{MQ_i} \vec{n}_{Q_i}}{r_{MQ_i}^2} - \frac{1}{L_L} \int \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P \right) dL_M = \\ &= \lambda_i \int_{\Delta L_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i} \vec{n}_{Q_i}}{r_{MQ_i}^2} dL_M - \frac{1}{L} \int \int \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dL_M = \\ &= \lambda_i \int_{\Delta L_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i} \vec{n}_{Q_i}}{r_{MQ_i}^2} dL_M - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{N_L} \lambda_k \int_{\Delta L_j \Delta L_k} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dL_M, \quad i=1, 2, \dots, N_L, \end{aligned}$$

де Q_i – центральна точка елементарної ділянки ΔL_i , $i=1, 2, \dots, N_L$;
 $\lambda_i = (\mu_i - \mu_0) / (\mu_i + \mu_0)$ – параметр інтегрального рівняння; λ_k – аналогічно,
 $k=1, 2, \dots, N_L$.

Позначимо,

$$\begin{aligned} (T_{LL}^{11})_{i,j} &= \int_{\Delta L_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i} \vec{n}_{Q_i}}{r_{MQ_i}^2} dL_M = \int_{\Delta L_j} [h_r(M, Q_i) n_r(Q_i) + h_\alpha(M, Q_i) n_\alpha(Q_i)] dL_M = \\ &= n_r(Q_i) \int_{\Delta L_j} h_r(M, Q_i) dL_M + n_\alpha(Q_i) \int_{\Delta L_j} h_\alpha(M, Q_i) dL_M, \quad i, j=1, 2, \dots, N_L, \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T_{LL}^{12})_{j,k} &= \int_{\Delta L_j \Delta L_k} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dL_M = \int_{\Delta L_j \Delta L_k} [h_r(M, P) n_r(P) + h_\alpha(M, P) n_\alpha(P)] dL_P dL_M = \\ &= n_r(P_k) \int_{\Delta L_j \Delta L_k} h_r(M, P) dL_P dL_M + n_\alpha(P_k) \int_{\Delta L_j \Delta L_k} h_\alpha(M, P) dL_P dL_M, \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$j, k=1, 2, \dots, N_L.$$

Враховуючи те, що елементарні ділянки ΔL_i , $i=1, 2, \dots, N_L$, являють собою

або лінійні відрізки ($n_r=0$, $n_\alpha=1$ або $n_\alpha=-1$), що спрямовані вздовж радіусу, або дуги ($n_r=1$ або $n_r=-1$, $n_\alpha=0$), то можемо розписати:

якщо $n_r(P)=1$ або $n_r(P)=-1$ та $n_\alpha(P)=0$, то $dL_P=r_P d\alpha_P$,

якщо $n_r(P)=0$ та $n_\alpha(P)=1$ або $n_\alpha(P)=-1$, то $dL_P=dr_P$.

Аналогічно:

якщо $n_r(M)=1$ або $n_r(M)=-1$ та $n_\alpha(M)=0$, то $dL_M=r_M d\alpha_M$,

якщо $n_r(M)=0$ та $n_\alpha(M)=1$ або $n_\alpha(M)=-1$, то $dL_M=dr_M$.

Розпишемо алгоритм розрахунку елементів матриці $(T_{LL}^{11})_{i,j}$, $i,j=1,2,\dots,N_L$:

if $n_r(Q_i) \neq 0$ **then**

if $n_r(M_j) \neq 0$ **then**

$$(T_{LL}^{11})_{i,j} = n_r(Q_i) \int_{\alpha_j - \Delta\alpha_j}^{\alpha_j + \Delta\alpha_j} h_r(r_M, \alpha_M, r_i, \alpha_i) r_M d\alpha_M$$

else

$$(T_{LL}^{11})_{i,j} = n_r(Q_i) \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} h_r(r_M, \alpha_M, r_i, \alpha_i) dr_M$$

end if

else

if $n_\alpha(M_j) \neq 0$ **then**

$$(T_{LL}^{11})_{i,j} = n_\alpha(Q_i) \int_{\alpha_j - \Delta\alpha_j}^{\alpha_j + \Delta\alpha_j} h_\alpha(r_M, \alpha_M, r_i, \alpha_i) r_M d\alpha_M$$

else

$$(T_{LL}^{11})_{i,j} = n_\alpha(Q_i) \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} h_\alpha(r_M, \alpha_M, r_i, \alpha_i) dr_M$$

end if

end if

Тут: (r_i, α_i) – координати центральної точки Q_i елементарної ділянки ΔL_i , $i=1,2,\dots,N_S$; (r_j, α_j) – аналогічно для точки M_j елементарної ділянки ΔL_j ,

$j=1,2,\dots,N_S$; $\Delta\alpha_j$, Δr_j – розміри елементарної ділянки ΔL_j у напрямку кута та радіусу; функції $h_r(\dots)$ та $h_\alpha(\dots)$ визначаються за залежностями (3.9) та (3.10).

Розпишемо алгоритм розрахунку елементів матриці $(T_{LL}^{12})_{j,k}$, $j,k=1,2,\dots,N_L$:

if $n_r(M_j) \neq 0$ **then**

if $n_r(P_k) \neq 0$ **then**

$$(T_{LL}^{12})_{j,k} = n_r(P_k) \int_{\alpha_j - \Delta\alpha_j}^{\alpha_j + \Delta\alpha_j} \int_{\alpha_k - \Delta\alpha_k}^{\alpha_k + \Delta\alpha_k} h_r(r_M, \alpha_M, r_P, \alpha_P) r_P r_M d\alpha_P d\alpha_M$$

else

$$(T_{LL}^{12})_{j,k} = n_\alpha(P_k) \int_{\alpha_j - \Delta\alpha_j}^{\alpha_j + \Delta\alpha_j} \int_{r_k - \Delta r_k}^{r_k + \Delta r_k} h_\alpha(r_M, \alpha_M, r_P, \alpha_P) r_M dr_P d\alpha_M$$

end if

else

if $n_r(P_k) \neq 0$ **then**

$$(T_{LL}^{12})_{j,k} = n_r(P_k) \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} \int_{\alpha_k - \Delta\alpha_k}^{\alpha_k + \Delta\alpha_k} h_r(r_M, \alpha_M, r_P, \alpha_P) r_P d\alpha_P dr_M$$

else

$$(T_{LL}^{12})_{j,k} = n_\alpha(P_k) \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} \int_{r_k - \Delta r_k}^{r_k + \Delta r_k} h_\alpha(r_M, \alpha_M, r_P, \alpha_P) dr_P dr_M$$

end if

end if

Тут: (r_j, α_j) – координати центральної точки M_j елементарної ділянки ΔL_j , $i=1,2,\dots,N_L$; (r_k, α_k) – аналогічно для точки P_k елементарної ділянки ΔL_k , $k=1,2,\dots,N_L$; $\Delta\alpha_j$, Δr_j та Δr_k , $\Delta\alpha_k$ – розміри елементарної ділянки ΔL_j та ΔL_k у напрямку радіусу, кута, $j,k=1,2,\dots,N_L$; функції $h_r(\dots)$ та $h_\alpha(\dots)$ визначаються за залежностями (3.9) та (3.10).

Тоді

$$(K_1)_{i,j} = \int_{\Delta L_j} K_1(M, Q_i) dL_M = \lambda_i (T_{LL}^{11})_{i,j} - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{N_L} \lambda_k (T_{LL}^{12})_{j,k}, \quad i, j=1,2,\dots,N_L. \quad (3.14)$$

3.1.2 Апроксимація ядра $K_2(M, Q)$ скінченновимірним аналогом

Для формування скінченновимірного аналога для ядра $K_2(M, Q)$ запишемо

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_j} K_2(M, Q_i) dS_M &= \int_{\Delta S_j} \left[\lambda(Q_i) \frac{\vec{r}_{MQ_i} \vec{n}_{Q_i}}{r_{MQ_i}^2} - \frac{1}{L} \int \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P - \frac{\pi}{L} \right] dS_M = \\ &= \int_{\Delta S_j} \lambda(Q_i) \frac{\vec{r}_{MQ_i} \vec{n}_{Q_i}}{r_{MQ_i}^2} dS_M - \frac{1}{L} \int \int \lambda(P) \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dS_M - \frac{\pi}{L} \int_{\Delta S_j} dS_M = \\ &= \lambda_i \int_{\Delta S_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i} \vec{n}_{Q_i}}{r_{MQ_i}^2} dS_M - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{N_L} \lambda_k \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dS_M - \frac{\pi}{L} \Delta S_j, \quad i=1,2,\dots,N_L, \quad j=1,2,\dots,N_S. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} (T_{LS}^{21})_{i,j} &= \int_{\Delta S_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i} \vec{n}_{Q_i}}{r_{MQ_i}^2} dS_M = \int_{\Delta S_j} [h_r(M, Q_i) n_r(Q_i) + h_\alpha(M, Q_i) n_\alpha(Q_i)] dS_M = \\ &= n_r(Q_i) \int_{\Delta S_j} h_r(M, Q_i) dS_M + n_\alpha(Q_i) \int_{\Delta S_j} h_\alpha(M, Q_i) dS_M, \quad i=1,2,\dots,N_L, \quad j=1,2,\dots,N_S, \\ (T_{LS}^{22})_{j,k} &= \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dS_M = \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} [h_r(M, P) n_r(P) + h_\alpha(M, P) n_\alpha(P)] dL_P dS_M = \\ &= \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} h_r(M, P) n_r(P) dL_P dS_M + \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} h_\alpha(M, P) n_\alpha(P) dL_P dS_M, \quad j=1,2,\dots,N_S, \quad k=1,2,\dots,N_L. \end{aligned}$$

Розпишемо алгоритм розрахунку елементів матриці $(T_{LS}^{21})_{i,j}$, $i=1,2,\dots,N_L$,

$j=1,2,\dots,N_S$:

if $n_r(Q_i) \neq 0$ **then**

$$(T_{LS}^{21})_{i,j} = n_r(Q_i) \int_{\alpha_j - \Delta\alpha_j}^{\alpha_j + \Delta\alpha_j} \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} h_r(r_M, \alpha_M, r_i, \alpha_i) r_M dr_M d\alpha_M$$

else

$$(T_{LS}^{21})_{i,j} = n_\alpha(Q_i) \int_{\alpha_j - \Delta\alpha_j}^{\alpha_j + \Delta\alpha_j} \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} h_\alpha(r_M, \alpha_M, r_i, \alpha_i) r_M dr_M d\alpha_M$$

end if

Розпишемо алгоритм розрахунку елементів матриці $(T_{LS}^{22})_{j,k}$, $j=1,2,\dots,N_S$,
 $k=1,2,\dots,N_L$:

if $n_r(P_k) \neq 0$ **then**

$$(T_{LS}^{22})_{j,k} = \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} \int_{\alpha_j - \Delta \alpha_j}^{\alpha_j + \Delta \alpha_j} n_r(P_k) \int_{\alpha_k - \Delta \alpha_k}^{\alpha_k + \Delta \alpha_k} h_r(M, P) r_P r_M d\alpha_P d\alpha_M dr_M$$

else

$$(T_{LS}^{22})_{j,k} = \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} \int_{\alpha_j - \Delta \alpha_j}^{\alpha_j + \Delta \alpha_j} n_\alpha(P_k) \int_{r_k - \Delta r_k}^{r_k + \Delta r_k} h_\alpha(M, P) r_M dr_P d\alpha_M dr_M$$

end if

Тоді

$$(K_2)_{i,j} = \int_{\Delta S_j} K_2(M, Q_i) dS_M = \lambda_i (T_{LS}^{21})_{i,j} - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{N_L} \lambda_k (T_{LS}^{22})_{j,k} - \frac{\pi}{L} \Delta S_j,$$

$$i=1,2,\dots,N_L, \quad j=1,2,\dots,N_S. \quad (3.15)$$

3.1.3 Апроксимація ядра $K_3(M, Q)$ скінченновимірним аналогом

$$\begin{aligned} (K_3)_{i,j} &= \int_{\Delta S_j} K_3(M, Q_i) dS_M = \int_{\Delta S_j} \left[\frac{\vec{r}_{MQ_i} \text{grad}_Q \mu(Q_i)}{r_{MQ_i}^2 \mu(Q_i)} - \frac{1}{S_L} \int \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P + \frac{2\pi}{S} \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0} \right] dS_M = \\ &= \int_{\Delta S_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i} \text{grad}_Q \mu(Q_i)}{r_{MQ_i}^2 \mu(Q_i)} dS_M - \frac{1}{S} \int_{\Delta S_j L} \int \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dS_M + \frac{2\pi}{S} \int_{\Delta S_j} \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0} dS_M = \\ &= \frac{\text{grad}_Q \mu(Q_i)}{\mu(Q_i)} \int_{\Delta S_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i}}{r_{MQ_i}^2} dS_M - \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{N_L} \ln \frac{\mu_k}{\mu_0} \int_{\Delta S_j \Delta L_k} \int \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dS_M + \frac{2\pi}{S} \ln \frac{\mu_j}{\mu_0} \Delta S_j, \quad i, j=1,2,\dots,N_S, \end{aligned}$$

де Q_i – центральна точка елементарної області ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$; μ_i – абсолютна магнітна проникність цієї області; μ_k – абсолютна магнітна проникність елементарної області ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$, що прилягає до границі ΔL_k , $k=1,2,\dots,N_L$.

Розпишемо кожен складову останнього виразу окремо.

Позначимо

$$\vec{G}(Q_i) = \frac{\text{grad}_Q \mu(Q_i)}{\mu(Q_i)}, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad (3.16)$$

тоді

$$\left(T_{SS}^{31}\right)_{i,j} = \frac{\text{grad}_Q \mu(Q_i)}{\mu(Q_i)} \int_{\Delta S_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i}}{r_{MQ_i}^2} dS_M = G_r(Q_i) \int_{\Delta S_j} h_r(Q_i, M) dS_M + G_\alpha(Q_i) \int_{\Delta S_j} h_\alpha(Q_i, M) dS_M,$$

$$i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_S,$$

$$\left(T_{SS}^{32}\right)_{j,k} = \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dS_M = \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} [h_r(M, P) n_r(P) + h_\alpha(M, P) n_\alpha(P)] dL_P dS_M =$$

$$= \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} h_r(M, P) n_r(P) dL_P dS_M + \int_{\Delta S_j} \int_{\Delta L_k} h_\alpha(M, P) n_\alpha(P) dL_P dS_M,$$

$$j=1,2,\dots,N_L, \quad k=1,2,\dots,N_S,$$

Розпишемо алгоритм розрахунку елементів матриці $\left(T_{SS}^{31}\right)_{i,j}$:

$$\left(T_{SS}^{31}\right)_{i,j} = G_r(r_i, \alpha_i) \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} \int_{\alpha_j - \Delta \alpha_j}^{\alpha_j + \Delta \alpha_j} h_r(\alpha_i, r_i, \alpha_M, r_M) r_M d\alpha_M dr_M +$$

$$+ G_\alpha(r_i, \alpha_i) \int_{r_j - \Delta r_j}^{r_j + \Delta r_j} \int_{\alpha_j - \Delta \alpha_j}^{\alpha_j + \Delta \alpha_j} h_\alpha(\alpha_i, r_i, \alpha_M, r_M) r_M d\alpha_M dr_M,$$

де (α_i, r_i) – координати центральної точки Q_i елементарної площадки ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$; (α_j, r_j) – аналогічно для точки M_j елементарної площадки ΔS_j , $j=1,2,\dots,N_S$; $\Delta \alpha_j$, Δr_j – її розміри у напрямку кута та радіусу; функції $G_r(\dots)$ та $G_\alpha(\dots)$ – r та α компоненти векторної функції (3.16); функції $h_r(\dots)$ та $h_\alpha(\dots)$ визначаються за залежностями (3.9) та (3.10).

Тоді

$$\left(K_3\right)_{i,j} = \int_{\Delta S_j} K_3(M, Q_i) dS_M = \left(T_{SS}^{31}\right)_{i,j} - \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{N_D} \ln \frac{\mu_k}{\mu_0} \left(T_{SS}^{32}\right)_{j,k} - \frac{2\pi}{S} \ln \frac{\mu_j}{\mu_0} \Delta S_j,$$

$$i=1,2,\dots,N_L, \quad j=1,2,\dots,N_S. \quad (3.17)$$

3.1.4. Апроксимація ядра $K_4(M, Q)$ скінченновимірним аналогом

$$\begin{aligned}
(K_4)_{i,j} &= \int_{\Delta L_j} K_4(M, Q_i) dL_M = \\
&= \int_{\Delta L_j} \left[\frac{\vec{r}_{MQ} \text{grad}_Q \mu(Q)}{\mu(Q) r_{MQ}^2} - \frac{1}{S_L} \int \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P + \frac{\pi}{S} \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0} + \frac{2\pi}{S} \right] dL_M = \\
&= \int_{\Delta L_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i} \text{grad}_Q \mu(Q_i)}{r_{MQ_i}^2 \mu(Q_i)} dL_M - \frac{1}{S} \int_{\Delta L_j} \int \ln \frac{\mu(P)}{\mu_0} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dL_M + \frac{\pi}{S} \int_{\Delta L_j} \ln \frac{\mu(M)}{\mu_0} dL_M + \frac{2\pi}{S} \Delta L_j = \\
&= \frac{\text{grad}_Q \mu(Q_i)}{\mu(Q_i)} \int_{\Delta L_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i}}{r_{MQ_i}^2} dL_M - \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{N_L} \ln \frac{\mu_k}{\mu_0} \int \int_{\Delta L_j, \Delta L_k} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dL_M + \frac{\pi}{S} \ln \frac{\mu_j}{\mu_0} \Delta L_j + \frac{2\pi}{S} \Delta L_j, \\
& \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_L.
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\vec{G}(Q_i) = \frac{\text{grad}_Q \mu(Q_i)}{\mu(Q_i)}, \quad i=1,2,\dots,N_S,$$

$$(T_{SL}^{41})_{i,j} = \frac{\text{grad}_Q \mu(Q_i)}{\mu(Q_i)} \int_{\Delta L_j} \frac{\vec{r}_{MQ_i}}{r_{MQ_i}^2} dL_M = G_r(Q_i) \int_{\Delta L_j} h_r(Q_i, M) dL_M + G_\alpha(Q_i) \int_{\Delta L_j} h_\alpha(Q_i, M) dL_M,$$

$$i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_L,$$

$$(T_{LL}^{42})_{j,k} = \int \int_{\Delta L_j, \Delta L_k} \frac{\vec{r}_{MP} \vec{n}_P}{r_{MP}^2} dL_P dL_M = \int \int_{\Delta L_j, \Delta L_k} [h_r(M, P) n_r(P) + h_\alpha(M, P) n_\alpha(P)] dL_P dL_M,$$

$$j=1,2,\dots,N_L, \quad k=1,2,\dots,N_L.$$

Тоді

$$(K_4)_{i,j} = \int_{\Delta L_j} K_3(M, Q_i) dL_M = (T_{SL}^{41})_{i,j} - \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{N_D} \ln \frac{\mu_k}{\mu_0} (T_{LL}^{42})_{j,k} + \frac{\pi}{S} \ln \frac{\mu_j}{\mu_0} \Delta L_j + \frac{2\pi}{S} \Delta L_j,$$

$$i=1,2,\dots,N_L, \quad j=1,2,\dots,N_S. \quad (3.18)$$

3.1.5 Апроксимація правої частини інтегрального рівняння (3.6)

Права частина рівняння (3.6) визначається виразом

$$F^\sigma(Q) = 2\mu_0 \left[\lambda(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q - \frac{1}{L_L} \int \lambda(P) \vec{H}^{(B)}(P) \vec{n}_P dL_P \right].$$

Напруженість магнітного поля $\vec{H}^{(B)}(Q)$ задається виразом

$$\vec{H}^{(B)}(Q) = \vec{H}^{(W)}(Q) + \vec{H}_{маг}^r(Q),$$

де $\vec{H}^{(W)}(Q)$ - напруженість магнітного поля (2.46), що створюють струми в обмотках статора; $\vec{H}_{маг}^r(Q)$ - напруженість магнітного поля (2.66), що створюють постійні однорідно намагнічені магніти.

Для знаходження значення правої частини $F^\sigma(Q)$ рівняння (3.1) в центральній точці Q_i , $i=1,2,\dots,N_4$, елементарної ділянки ΔL_i , $i=1,2,\dots,N_4$,

скористуємось виразом $F^\sigma(Q) = 2\mu_0 \left[\lambda(Q) \vec{H}^{(B)}(Q) \vec{n}_Q - \frac{1}{L_L} \int \lambda(P) \vec{H}^{(B)}(P) \vec{n}_P dL_P \right]$:

$$F^\sigma(Q_i) = 2\mu_0 \left[\lambda(Q_i) \vec{H}^{(B)}(Q_i) \vec{n}_{Q_i} - \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{N_L} \lambda(P_j) \vec{H}^{(B)}(P_j) \vec{n}_{P_j} \Delta L_j \right], i=1,2,\dots,N_4, \quad (3.19)$$

де $\lambda(Q_i) = (\mu_i - \mu_0) / (\mu_i + \mu_0)$, $i=1,2,\dots,N_4$ - параметр інтегрального рівняння (3.1); μ_i - значення абсолютної магнітної проникливості в точці Q_i , $i=1,2,\dots,N_4$, елементарної ділянки ΔL_i , $i=1,2,\dots,N_4$, при прагненні до неї із внутрішньої сторони феромагнетика; $\lambda(P_j)$ - аналогічно $\lambda(Q_i)$; \vec{n}_{Q_i} , $i=1,2,\dots,N_4$, - зовнішня нормаль до ділянки ΔL_i границі феромагнетика; \vec{n}_{P_j} , $i=1,2,\dots,N_4$ - аналогічно.

3.1.6 Апроксимація правої частини інтегрального рівняння (3.2)

Для знаходження її значення в центральній точці Q_i , $i=1,2,\dots,N_S$, елементарної площадки ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$ скористаємось виразом (3.3):

$$F^p(Q_i) = \mu_0 \left[\frac{\vec{H}^{(B)}(Q_i) \text{grad}_{Q_i} \mu(Q_i)}{\mu(Q_i)} - \frac{1}{S} \sum_{j=1}^{N_S} \frac{\vec{H}^{(B)}(P_j) \text{grad}_{P_j} \mu(P_j)}{\mu(P_j)} \Delta S_j \right], i=1,2,\dots,N_S, \quad (3.20)$$

де $\vec{H}^{(B)}(Q_i)$ - напруженість магнітного поля $\vec{H}^{(B)}(Q) = \vec{H}^{(W)}(Q) + \vec{H}_{маг}^r(Q)$ в точці

$Q_i, i=1,2,\dots,N_S$; $\overline{H}^{(B)}(P_j)$ – аналогічно в точці $P_j, j=1,2,\dots,N_S$; $grad_Q\mu(Q_i)$ – градієнт абсолютної магнітної проникливості в точці $Q_i, i=1,2,\dots,N_S$; $grad_P\mu(P_j)$ – аналогічно $j=1,2,\dots,N_S$; ΔS_j – площа елементарної площадки, $j=1,2,\dots,N_S$; $\mu(Q_i)$ – значення абсолютної магнітної проникливості елементарної площадки $\Delta S_i, i=1,2,\dots,N_S$; $\mu(P_j)$ – аналогічно для елементарної площадки $\Delta S_j, i=1,2,\dots,N_S$.

3.2 Апроксимація функції $grad_Q\mu(Q)$ скінченновимірним аналогом

Для апроксимації функції $grad_Q\mu(Q)$ скінченновимірним аналогом, як і раніше, розбиваємо границю L феромагнітних тіл на N_L елементарних ділянок $\Delta L_i, i=1,2,\dots,N_L$, а самі феромагнітні тіла на N_S елементарних площ $\Delta S_i, i=1,2,\dots,N_S$. Для шуканих величин – густини простого шару магнітних зарядів і об'ємної густини магнітних зарядів – використовуємо кусково-постійну апроксимацію.

Таким чином, для часткових похідних від напруженості магнітного поля (2.20) – (2.23), що створює простий шар магнітних зарядів на границі феромагнітних тіл електричного двигуна:

$$\frac{\partial H_r^\sigma(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j \int_{\Delta L_j} P_{rr}(M, Q) dL_M, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial H_\alpha^\sigma(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j \int_{\Delta L_j} P_{\alpha r}(M, Q) dL_M, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial H_r^\sigma(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j \int_{\Delta L_j} P_{r\alpha}(M, Q) dL_M, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial H_\alpha^\sigma(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j \int_{\Delta L_j} P_{\alpha\alpha}(M, Q) dL_M. \quad (3.24)$$

Аналогічні вираження мають відповідні часткові похідні від компонентів напруженості магнітного поля, яке створюється постійними магнітами, але там інтегрування здійснюється за границею L_M постійних магнітів та з використанням густини простого шару магнітних зарядів на їх поверхні, що вводиться при використанні зарядової моделі для розрахунку напруженості магнітного поля від них.

Для часткових похідних від напруженості магнітного поля, що створюється об'ємними магнітними зарядами $\rho(M)$, – за виразами:

$$\frac{\partial H_r^p(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{j=1}^{N_S} \rho_j \int_{\Delta S_j} P_{rr}(M, Q) dS_M, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial H_\alpha^p(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{j=1}^{N_S} \rho_j \int_{\Delta S_j} P_{\alpha r}(M, Q) dS_M, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial H_r^p(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{j=1}^{N_S} \rho_j \int_{\Delta S_j} P_{r\alpha}(M, Q) dS_M, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial H_\alpha^p(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi\mu_0} \sum_{j=1}^{N_S} \rho_j \int_{\Delta S_j} P_{\alpha\alpha}(M, Q) dS_M. \quad (3.28)$$

Для відповідних похідних від напруженості магнітного поля, що створюється струмами у котушках (рис.3.4):

$$\frac{\partial H_r^{\delta w}(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p_S} \delta_w^k \left(- \int_{\Delta S_k^{w+}} P_{\alpha r}(M, Q) dS_M + \int_{\Delta S_k^{w-}} P_{\alpha r}(M, Q) dS_M \right), \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial H_\alpha^{\delta w}(r_Q, \alpha_Q)}{\partial r_Q} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p_S} \delta_w^k \left(\int_{\Delta S_k^{w+}} P_{rr}(M, Q) dS_M - \int_{\Delta S_k^{w-}} P_{rr}(M, Q) dS_M \right), \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial H_r^{\delta w}(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p_S} \delta_w^k \left(- \int_{\Delta S_k^{w+}} P_{\alpha\alpha}(M, Q) dS_M + \int_{\Delta S_k^{w-}} P_{\alpha\alpha}(M, Q) dS_M \right), \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial H_\alpha^{\delta w}(r_Q, \alpha_Q)}{\partial \alpha_Q} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{p_S} \delta_w^k \left(\int_{\Delta S_k^{w+}} P_{r\alpha}(M, Q) dS_M - \int_{\Delta S_k^{w-}} P_{r\alpha}(M, Q) dS_M \right). \quad (3.32)$$

Введемо позначення:

$\vec{\sigma} = \|\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_L}\|^T$ — вектор-стовпець, елементами якого є значення густини простого шару магнітних зарядів у центральній точці Q_i елементарної ділянки ΔL_i , $i=1,2,\dots,N_L$, на які розбивається границя L феромагнітних тіл;

$\vec{\rho} = \|\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{N_S}\|^T$ — вектор-стовпець, елементами якого є значення об'ємної густини магнітних зарядів у центральній крапці Q_i елементарної площадки ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$, на які розбивається переріз феромагнітних тіл S ;

$\vec{\sigma}_J = \|\sigma_{J_1}, \sigma_{J_2}, \dots, \sigma_{J_{N_{L_M}}}\|^T$ — вектор-стовпець, елементами якого є значення густини простого шару магнітних зарядів у центральній точці Q_i елементарної ділянки ΔL_{M_i} , $i=1,2,\dots,N_{L_M}$, на які розбивається границя L_M постійних магнітів;

$\vec{\delta}_W = \|\delta_{W_1}, \delta_{W_2}, \dots, \delta_{W_{N_W}}\|^T$ — вектор-стовпець, елементами якого є миттєві значення густини струмів у центрі елементарної області ΔS_{W_i} , $i=1,2,\dots,N_W$, на які розбивається переріз котушок обмотки S_W .

Тоді компоненти напруженості магнітного поля в центральних точках Q_i , $i=1,2,\dots,N_S$, елементарних площадок, на які розбивається переріз S феромагнітних тіл, знаходяться відповідно до (2.16) в такий спосіб

$$\vec{H}_r = H_{rSL}^\sigma \vec{\sigma} + H_{rSL_M}^\sigma \vec{\sigma}_J + H_{rSS}^\rho \vec{\rho} + H_{rSS_W}^\delta \vec{\delta}_W, \quad (3.33)$$

$$\vec{H}_\alpha = H_{\alpha SL}^\sigma \vec{\sigma} + H_{\alpha SL_M}^\sigma \vec{\sigma}_J + H_{\alpha SS}^\rho \vec{\rho} + H_{\alpha SS_W}^\delta \vec{\delta}_W, \quad (3.34)$$

де $\vec{H}_r = \|H_{r1}, H_{r2}, \dots, H_{rN_S}\|^T$, $\vec{H}_\alpha = \|H_{\alpha1}, H_{\alpha2}, \dots, H_{\alpha N_S}\|^T$ — вектор-стовпці, елементами яких є значення r - і α -компонент напруженості магнітного поля в центральних точках Q_i , $i=1,2,\dots,N_S$, елементарних площадок, на які розбивається переріз S феромагнітних тіл;

$$H_{rSL}^\sigma = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_j} h_r(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_L$$
 — матриця, розмірності $N_S \times N_L$;

$$H_{rSL_M}^\sigma = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_{Mj}} h_r(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{L_M} - \text{матриця, розмірності}$$

$$N_S \times N_{L_M};$$

$$H_{rSS}^\rho = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_j} h_r(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i,j=1,2,\dots,N_S, - \text{матриця, розмірності } N_S \times N_S;$$

$$H_{rSS_W}^\delta = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_k^{W+}} h_\alpha(M, Q_i) dS_M - \int_{\Delta S_k^{W-}} h_\alpha(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad k=1,2,\dots,N_W - \text{матриця,}$$

розмірності $N_S \times N_W$;

$$H_{\alpha SL}^\sigma = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_j} h_\alpha(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_L - \text{матриця, розмірності } N_S \times N_L;$$

$$H_{\alpha SL_M}^\sigma = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_{Mj}} h_\alpha(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{L_M} - \text{матриця, розмірності}$$

$$N_S \times N_{L_M};$$

$$H_{\alpha SS}^\rho = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_j} h_\alpha(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i,j=1,2,\dots,N_S, - \text{матриця, розмірності } N_S \times N_S;$$

$$H_{\alpha SS_W}^\delta = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_k^{W+}} h_r(M, Q_i) dS_M - \int_{\Delta S_k^{W-}} h_r(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad k=1,2,\dots,N_W, - \text{матриця,}$$

розмірності $N_S \times N_W$.

Тут $h_r(M, Q)$, $h_\alpha(M, Q)$ визначаються виразами (3.9), (3.10).

Вектор-стовпець, який задає модуль напруженості в центральних точках Q_i , $i=1,2,\dots,N_S$, елементарних площадок, на які розбивається переріз S феромагнітних тіл, знаходиться в такий спосіб

$$\vec{H} = \left\| \sqrt{H_{ri}^2 + H_{ai}^2} \right\|^T, \quad i=1,2,\dots,N_S. \quad (3.35)$$

Далі знаходимо часткові похідні

$$\vec{H}_r^{\partial r} = (H_r^{\partial r})_{SL} \vec{\sigma} + (H_r^{\partial r})_{SL_M} \vec{\sigma}_M + (H_r^{\partial r})_{SS} \vec{\rho} + (H_r^{\partial r})_{SS_W} \vec{\delta}_W,$$

$$\vec{H}_\alpha^{\partial r} = (H_\alpha^{\partial r})_{SL} \vec{\sigma} + (H_\alpha^{\partial r})_{SL_M} \vec{\sigma}_M + (H_\alpha^{\partial r})_{SS} \vec{\rho} + (H_\alpha^{\partial r})_{SS_W} \vec{\delta}_W,$$

$$\vec{H}_r^{\partial \alpha} = (H_r^{\partial \alpha})_{SL} \vec{\sigma} + (H_r^{\partial \alpha})_{SL_M} \vec{\sigma}_M + (H_r^{\partial \alpha})_{SS} \vec{\rho} + (H_r^{\partial \alpha})_{SS_W} \vec{\delta}_W,$$

$$\vec{H}_\alpha^{\partial \alpha} = (H_\alpha^{\partial \alpha})_{SL} \vec{\sigma} + (H_\alpha^{\partial \alpha})_{SL_M} \vec{\sigma}_M + (H_\alpha^{\partial \alpha})_{SS} \vec{\rho} + (H_\alpha^{\partial \alpha})_{SS_W} \vec{\delta}_W,$$

де

$$(H_r^{\partial r})_{SL} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_j} P_{rr}(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_L,$$

$$(H_r^{\partial r})_{SL_M} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_{Mj}} P_{rr}(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{L_M},$$

$$(H_r^{\partial r})_{SS} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_j} P_{rr}(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_S,$$

$$(H_r^{\partial r})_{SS_W} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_k^{W+}} P_{\alpha r}(M, Q_i) dS_M - \int_{\Delta S_k^{W-}} P_{\alpha r}(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{S_W},$$

$$(H_\alpha^{\partial r})_{SL} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_j} P_{\alpha r}(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_L,$$

$$(H_\alpha^{\partial r})_{SL_M} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_{Mj}} P_{\alpha r}(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{L_M},$$

$$(H_\alpha^{\partial r})_{SS} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_j} P_{\alpha r}(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_S,$$

$$(H_\alpha^{\partial r})_{SS_W} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_k^{W+}} P_{rr}(M, Q_i) dS_M - \int_{\Delta S_k^{W-}} P_{rr}(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{S_W},$$

$$(H_r^{\partial \alpha})_{SL} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_j} P_{r\alpha}(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_L,$$

$$(H_r^{\partial \alpha})_{SL_M} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_{Mj}} P_{r\alpha}(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{L_M},$$

$$(H_r^{\partial \alpha})_{SS} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_j} P_{r\alpha}(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_S,$$

$$\left(H_r^{\partial\alpha} \right)_{SSW} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_k^{W+}} P_{\alpha\alpha}(M, Q_i) dS_M - \int_{\Delta S_k^{W-}} P_{\alpha\alpha}(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{S_W},$$

$$\left(H_\alpha^{\partial\alpha} \right)_{SL} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_j} P_{\alpha\alpha}(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_L,$$

$$\left(H_\alpha^{\partial\alpha} \right)_{SL_M} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta L_{Mj}} P_{\alpha\alpha}(M, Q_i) dL_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{L_M},$$

$$\left(H_\alpha^{\partial\alpha} \right)_{SS} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_j} P_{\alpha\alpha}(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_S,$$

$$\left(H_\alpha^{\partial\alpha} \right)_{SSW} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Delta S_k^{W+}} P_{r\alpha}(M, Q_i) dS_M - \int_{\Delta S_k^{W-}} P_{r\alpha}(M, Q_i) dS_M \right\|, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad j=1,2,\dots,N_{S_W}.$$

Таким чином, скінченновимірний аналог виразів (2.17) і (2.18) має вигляд

$$H_i^{\partial r} = \frac{1}{H_i} \left(H_{ri} H_{ri}^{\partial r} + H_{\alpha i} H_{\alpha i}^{\partial r} \right), \quad i=1,2,\dots,N_S,$$

$$H_i^{\partial\alpha} = \frac{1}{r_{Q_i} H_i} \left(H_{ri} H_{ri}^{\partial\alpha} + H_{\alpha i} H_{\alpha i}^{\partial\alpha} \right), \quad i=1,2,\dots,N_S.$$

Після чого знаходяться компоненти $grad_Q \mu(Q)$:

$$grad_Q \mu(Q_i) \cdot \vec{e}_r = \frac{\partial \mu}{\partial H}(Q_i) H_i^{\partial r}, \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad (3.36)$$

$$grad_Q \mu(Q_i) \cdot \vec{e}_\alpha = \frac{\partial \mu}{\partial H}(Q_i) H_i^{\partial\alpha}, \quad i=1,2,\dots,N_S. \quad (3.37)$$

Для залежності $\mu(H)$ може бути використаний той чи інший спосіб апроксимації [202].

3.3 Простий ітераційний метод знаходження магнітної проникності при розв'язанні нелінійної задачі

Перший алгоритм розв'язку системи інтегральних рівнянь представлений на блок-схемі (рис. 3.1), та реалізується наступним чином:

1. Задаємо розподіл магнітної проникності в нелінійних феромагнітних елементах μ , на першій ітерації задаємо її постійною.

2. Розв'язуємо рівняння (3.6) для визначення густини простого шару магнітних зарядів $\sigma_i^{(0)}$, $i=1,2,\dots,N_L$ на границі феромагнітних тіл, у якому задаємо $\rho_j^{(0)}=0$, $j=1,2,\dots,N_S$, що відповідає випадку розрахунку магнітного поля у кусково-одноріному лінійному середовищі.

3. За знайденим у пункті 2 розподілом $\sigma_i^{(0)}$, $i=1,2,\dots,N_L$, знаходимо значення напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$, на які поділено перерізи феромагнітних тіл.

4. За знайденим у пункті 3 розподілом напруженості магнітного поля з залежності $\mu=\mu(H)$ знаходимо значення магнітної проникності $\mu_i^{(0)}$ в елементарних площадках ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$, на які поділено перерізи феромагнітних тіл.

5. Формуємо на k -му кроці розв'язання нелінійної задачі матриці $K_1^{(k)}$, $K_2^{(k)}$, $K_3^{(k)}$, $K_4^{(k)}$ та праву частину $F^{\sigma(k)}$, $F^{\rho(k)}$ відповідно до співвідношень (3.14), (3.15), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) причому ядра $K_3^{(k)}$, $K_4^{(k)}$ та права частина $F^{\rho(k)}$ формуються з урахуванням співвідношення (3.36) та (3.37) для визначення дискретного аналога функції $grad\mu$.

6. Розв'язуємо СЛАР (3.6), (3.7), тим самим знаходимо розподіл густини простого шару магнітних зарядів $\vec{\sigma}^{(k)}$ на границі феромагнітних тіл та розподіл густини об'ємних магнітних зарядів $\vec{\rho}^{(k)}$.

7. За знайденим розподілом $\vec{\sigma}^{(k)}$ та $\vec{\rho}^{(k)}$ знаходимо значення модуля напруженості магнітного поля (3.35) у центральних точках елементарних площадок ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$, на які розбивається область феромагнітних елементів.

8. За знайденими значеннями напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних точок ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$, на які розбивається область феромагнітних елементів, знаходимо за залежністю $\mu(H)$ значення магнітної проникності вказаних елементарних площадок.

9. Перевіряємо виконання умови

$$\varepsilon_{\mu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S} (\mu_i^{(k)} - \mu_i^{(k-1)})^2}{\sum_{i=1}^{N_S} (\mu_i^{(k)})^2}} \leq \varepsilon_0 \quad \text{або} \quad \varepsilon_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S} [(H_{ri}^{(k)} - H_{ri}^{(k-1)})^2 + (H_{ai}^{(k)} - H_{ai}^{(k-1)})^2]}{\sum_{i=1}^{N_S} [(H_{ri}^{(k)})^2 + (H_{ai}^{(k)})^2]}} \leq \varepsilon_0, \quad (3.38)$$

де ε_0 – задана похибка визначення магнітної проникності в феромагнітному середовищі.

Якщо умова (3.38) виконується, то закінчуємо розрахунок та виводимо отримані на останньому кроці результати.

Якщо умова (3.38) не виконується, то задаємо $k := k + 1$ і переходимо до пункту 5.

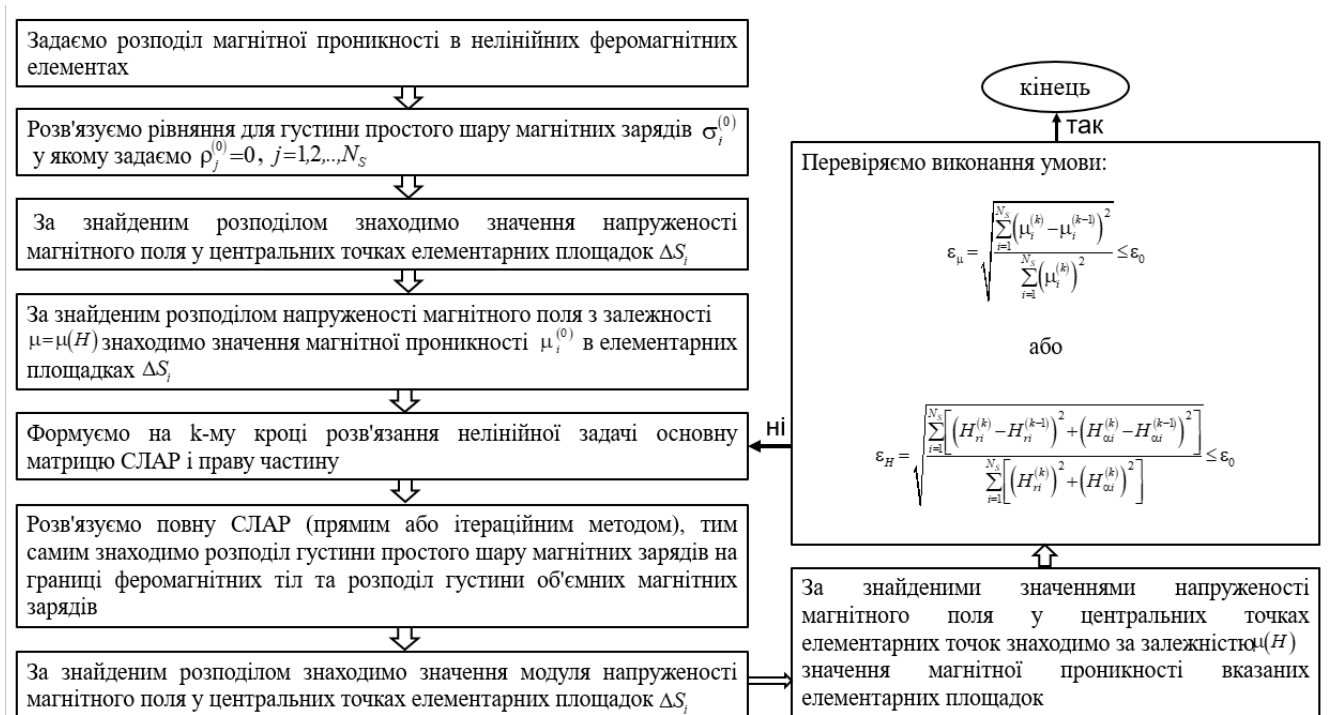


Рис. 3.1

При реалізації наведеного алгоритму в пункті 6 розв'язується система рівнянь (3.6), (3.7). Її розв'язок може бути знайдено або одним з прямих методів, наприклад методом Гауса, або методом послідовних наближень. Враховуючи те, що при її формуванні приходимо до повністю заповнених основних матриць з точки зору швидкості її розв'язання більш раціональним є метод послідовних наближень.

Нехай на нульовому кроці ітераційного процесу відомо розподіл густини

$\sigma_i^{(k)(0)}$, $\rho_j^{(k)(0)}$, що беремо з попереднього кроку розв'язання нелінійної задачі. Тоді для знаходження розв'язку системи рівнянь (3.6), (3.7) організуємо наступний ітераційним процес

$$\sigma_i^{(k)(n+1)} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j^{(k)(n)} \int_{\Delta L_j} K_1(M, Q_i) dL_M + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_D} \rho_j^{(k)(n)} \int_{\Delta S_j} K_2(M, Q_i) dS_M + F^\sigma(Q_i), \quad i=1,2,\dots,N_L, \quad (3.39)$$

$$\rho_i^{(k)(n+1)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j^{(k)(n)} \int_{\Delta L_j} K_4(M, Q_i) dL_M - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_D} \rho_j^{(k)(n)} \int_{\Delta S_j} K_3(M, Q_i) dS_M - F^\rho(Q_i), \quad i=1,2,\dots,N_S, \quad (3.40)$$

де n – номер ітерації.

Ітераційний процес завершується при виконанні умови:

$$\max(\varepsilon_\sigma, \varepsilon_\rho) < \varepsilon,$$

де

$$\varepsilon_\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_L} (\sigma_i^{(k)(n+1)} - \sigma_i^{(k)(n)})^2}{\sum_{i=1}^{N_L} (\sigma_i^{(k)(n+1)})^2}} \cdot 100\%, \quad \varepsilon_\rho = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S} (\rho_i^{(k)(n+1)} - \rho_i^{(k)(n)})^2}{\sum_{i=1}^{N_S} (\rho_i^{(k)(n+1)})^2}} \cdot 100\%;$$

ε – задана середньоквадратична похибка розв'язку системи рівнянь (3.6), (3.7)

3.4 Модифікований ітераційний метод знаходження магнітної проникності при розв'язанні нелінійної задачі

При реалізації ітераційного процесу розв'язання нелінійної задачі на 6 кроці розв'язання системи рівнянь (3.6), (3.7) розподіл магнітної проникності задається фіксованим, що отриманий на попередньому кроці. Але структура ядер цих рівнянь така, що є можливість уточнювати розподіл магнітної проникності по елементарним площинкам у процесі її розв'язання. Випишемо алгоритм розв'язання нелінійної задачі з урахуванням цієї особливості, що у загальному випадку описаний у підрозділі 2.4 та представимо його блок-схемою, що зображена на рисунку 3.2.

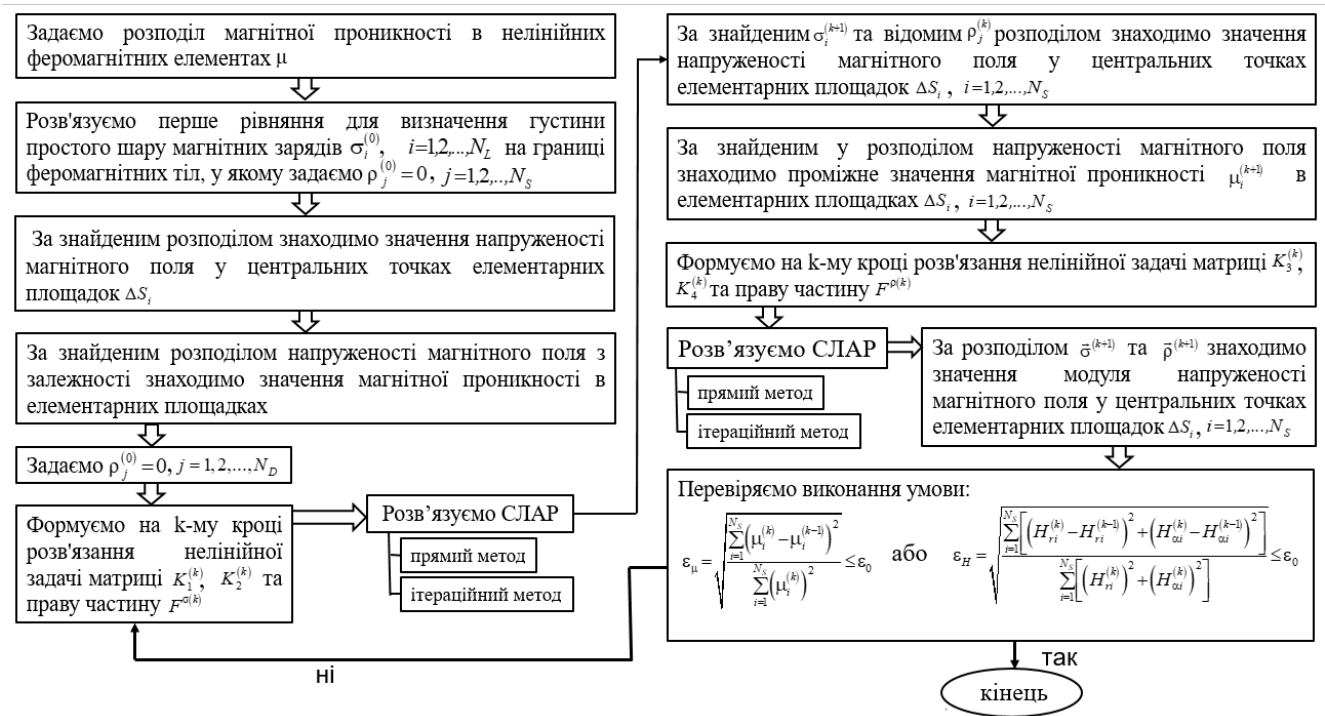


Рис. 3.2

Алгоритм.

1. Задаємо розподіл магнітної проникності в нелінійних феромагнітних елементах μ , на першій ітерації задаємо її постійною.

2. Розв'язуємо рівняння (3.6) для визначення густини простого шару магнітних зарядів $\sigma_i^{(0)}$, $i=1,2,\dots,N_L$ на границі феромагнітних тіл, у якому задаємо $\rho_j^{(0)}=0$, $j=1,2,\dots,N_S$, що відповідає випадку розрахунку магнітного поля у кусково-одноріному лінійному середовищі.

3. За знайденим у пункті 2 розподілом $\sigma_i^{(0)}$, $i=1,2,\dots,N_L$, знаходимо значення напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$, на які поділено перерізи феромагнітних тіл.

4. За знайденим у пункті 3 розподілом напруженості магнітного поля з залежності $\mu=\mu(H)$ знаходимо значення магнітної проникності $\mu_i^{(0)}$ в елементарних площадках ΔS_i , $i=1,2,\dots,N_S$, на які поділено перерізи феромагнітних тіл.

5. Задаємо $\rho_j^{(0)} = 0, j = 1, 2, \dots, N_D$.

6. Формуємо на k -му кроці розв'язання нелінійної задачі матриці $K_1^{(k)}, K_2^{(k)}$, та праву частину $F^{\sigma^{(k)}}$ відповідно до співвідношень (3.14), (3.15), (3.19).

7. Розв'язуємо СЛАР:

або з використанням прямого методу (наприклад методу Гауса)

$$\sigma_i^{(k+1)} - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j^{(k+1)} \int_{\Delta L_j} K_1^{(k)}(M, Q_i) dL_M = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_D} \rho_j^{(k)} \int_{\Delta S_j} K_2^{(k)}(M, Q_i) dS_M + F^{\sigma^{(k)}}(Q_i),$$

$$i=1, 2, \dots, N_L;$$

або з використанням ітераційного методу за схемою ($n=1, 2, \dots$ – номер ітерації розв'язання СЛАР)

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(k+1)(n+1)} = & \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j^{(k+1)(n)} \int_{\Delta L_j} K_1^{(k)}(M, Q_i) dL_M + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_D} \rho_j^{(k)} \int_{\Delta S_j} K_2^{(k)}(M, Q_i) dS_M + F^{\sigma^{(k)}}(Q_i), \quad i=1, 2, \dots, N_L; \end{aligned}$$

8. За знайденим у пункті 7 розподілом $\sigma_i^{(k+1)}$, $i=1, 2, \dots, N_L$, та відомим розподілом $\rho_j^{(k)}$, $j=1, 2, \dots, N_D$, знаходимо значення напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i , $i=1, 2, \dots, N_S$, на які поділено перерізи феромагнітних тіл.

9. За знайденим у пункті 8 розподілом напруженості магнітного поля з залежності $\mu = \mu(H)$ знаходимо проміжне значення магнітної проникності $\mu_i^{(k+1)}$ в елементарних площадках ΔS_i , $i=1, 2, \dots, N_S$, на які поділено перерізи феромагнітних тіл.

10. Формуємо на k -му кроці розв'язання нелінійної задачі матриці $K_3^{(k)}, K_4^{(k)}$ та праву частину $F^{\rho^{(k)}}$ відповідно до співвідношень (3.17), (3.18), (3.20), (3.20) причому ядра $K_3^{(k)}, K_4^{(k)}$ та права частина $F^{\rho^{(k)}}$ формуються з урахуванням співвідношення (3.36) та (3.37) для визначення дискретного аналога функції $grad\mu$.

11. Розв'язуємо СЛАР:

або з використанням прямого методу (наприклад методу Гауса)

$$\rho_i^{(k+1)} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_D} \rho_j^{(k+1)} \int_{\Delta S_j} K_4^{(k)}(M, Q_i) dS_M = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j^{(k+1)} \int_{\Delta L_j} K_4^{(k)}(M, Q_i) dL_M - F^{\rho^{(k)}}(Q_i),$$

$$i=1, 2, \dots, N_S,$$

або з використанням ітераційного методу за схемою ($n=1, 2, \dots$ – номер ітерації розв'язання СЛАР)

$$\rho_i^{(k+1)(n+1)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_D} \rho_j^{(k)(n)} \int_{\Delta S_j} K_4^{(k)}(M, Q_i) dS_M -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N_L} \sigma_j^{(k+1)} \int_{\Delta L_j} K_4^{(k)}(M, Q_i) dL_M - F^{\rho^{(k)}}(Q_i), \quad i=1, 2, \dots, N_S,$$

тим самим знаходимо розподіл густини простого шару магнітних зарядів $\vec{\sigma}^{(k+1)}$ на границі феромагнітних тіл та розподіл густини об'ємних магнітних зарядів $\vec{\rho}^{(k+1)}$.

12. За знайденим розподілом $\vec{\sigma}^{(k+1)}$ та $\vec{\rho}^{(k+1)}$ знаходимо значення модуля напруженості магнітного поля (3.35) у центральних точках елементарних площадок ΔS_i , $i=1, 2, \dots, N_S$, на які розбивається область феромагнітних елементів.

13. За знайденими значеннями напруженості магнітного поля у центральних точках елементарних площадок ΔS_i , $i=1, 2, \dots, N_S$, на які розбивається область феромагнітних елементів, знаходимо за залежністю $\mu(H)$ значення магнітної проникності вказаних елементарних площадок.

14. Перевіряємо виконання умови

$$\varepsilon_\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S} (\mu_i^{(k)} - \mu_i^{(k-1)})^2}{\sum_{i=1}^{N_S} (\mu_i^{(k)})^2}} \leq \varepsilon_0 \quad \text{або} \quad \varepsilon_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_S} \left[(H_{ri}^{(k)} - H_{ri}^{(k-1)})^2 + (H_{ai}^{(k)} - H_{ai}^{(k-1)})^2 \right]}{\sum_{i=1}^{N_S} \left[(H_{ri}^{(k)})^2 + (H_{ai}^{(k)})^2 \right]}} \leq \varepsilon_0, \quad (3.41)$$

де ε_0 – задана похибка визначення магнітної проникності в феромагнітному середовищі.

Якщо умова (3.41) виконується, то закінчуємо розрахунок та виводимо отримані на останньому кроці результати. Якщо умова (3.41) не виконується, то

задаємо $k := k + 1$ і переходимо до пункту 6.

3.5 Результати розрахунку магнітного поля у робочому зазорі безколекторного двигуна постійного струму

На рис.3.3 наведено геометричні параметри електричного двигуна: 1 – обмотка статора; 2 – статор; 3 – однорідно намагнічені постійні магніти; 4 – ротор. Матеріал, з якого виконано вал ротора і ферромагнітна частина статора – електротехнічна сталь, магнітні властивості якої представлені залежністю $B(H)$ (рис. 3.4). Постійні магніти виконано з $NdFeB$, коерцитивна сила магніту $H_c = 1000$ кА/м, або $B_r = 1,32$ Тл (напрямок намагніченості постійних магнітів показано на рис. 3.3). До котушок підключено джерела трапецевидної форми струму.

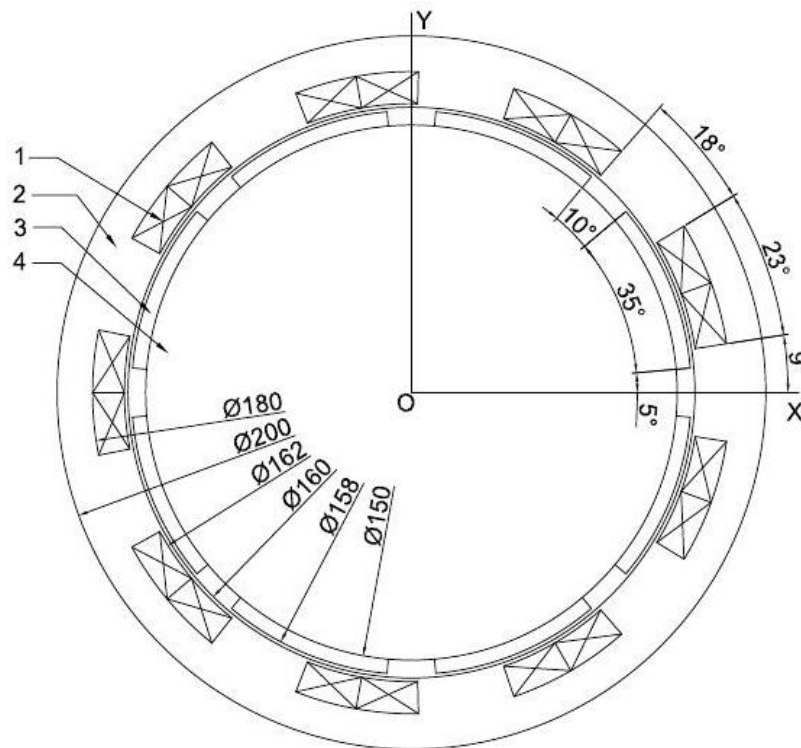


Рис. 3.3 Переріз безконтактного електричного двигуна з висококоерцитивними постійними магнітами (початкове положення ротора):
1 – обмотка статора; 2 – статор; 3 – однорідні намагнічені постійні магніти;
4 – роторний вал

Для аналізу розподілу магнітного поля у електричному двигуні з урахуванням залежності магнітної проникності феромагнітних матеріалів ротора та статора від напруженості магнітного поля скористаємось алгоритмом, що сформовано у підрозділі 3.3.

Границя магнітопроводу L розбивалась на 4032 елементарних ділянок, переріз ротора та статора S на 876 елементарних площинок.

Таблиця 3.1

Результати розрахунків за алгоритмом, що надано у підрозділі 3.3.

Крок розв'язання нелінійної задачі	а)		б)		Кількість ітерацій	в)		Кількість ітерацій	г)	
	ε_{μ} , %	ε_H , %	ε_{μ} , %	ε_H , %		ε_{μ} , %	ε_H , %		ε_{μ} , %	ε_H , %
1	23,2	79,9	23,2	79,9	437	23,2	79,9	192	23,5	80,0
2	16,1	60,2	16,1	60,2	398	16,1	60,2	124	17,0	57,9
3	15,1	32,7	15,1	32,7	421	15,1	32,7	94	17,1	31,3
4	8,9	13,5	8,9	13,5	316	8,9	13,5	52	13,2	13,1
5	16,8	6,2	16,8	6,2	281	16,8	6,1	32	15,7	5,7
6	5,7	3,7	5,7	3,7	253	5,8	3,7	17	6,6	2,5
7	9,9	2,4	9,9	2,4	211	10,3	2,3	7	6,1	1,2
8	9,4	1,5	9,4	1,5	186	9,5	1,53	6	3,0	0,7
9	12,1	1,5	12,1	1,5	174	12,1	1,54	-	-	-
10	10,7	1,4	10,7	1,4	162	10,7	1,48	-	-	-
11	10,1	1,1	9,06	1,08	124	8,8	1,1	-	-	-
12	10,1	1,1	10,1	1,1	134	10,1	1,2	-	-	-
13	9,0	0,9	9,0	0,9	130	9,13	0,99	-	-	-
Час розрахунків, с	15067		15176		1303		948			

У табл. 3.1 надано результати розрахунків: а) розв'язання СЛАР, до якої зводиться неперетворена система інтегральних рівнянь (1.26), (1.27), прямим

методом (метод Гауса); б) розв'язання СЛАР, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь (2.8), (2.9) з ядрами (2.13) та (2.14), прямим методом (метод Гауса); в) розв'язання СЛАР, до якої зводиться неперетворена система інтегральних рівнянь (1.26), (1.27) методом простої ітерації; г) розв'язання СЛАР, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь (2.8), (2.9) з ядрами (2.13) та (2.14), методом простої ітерації.

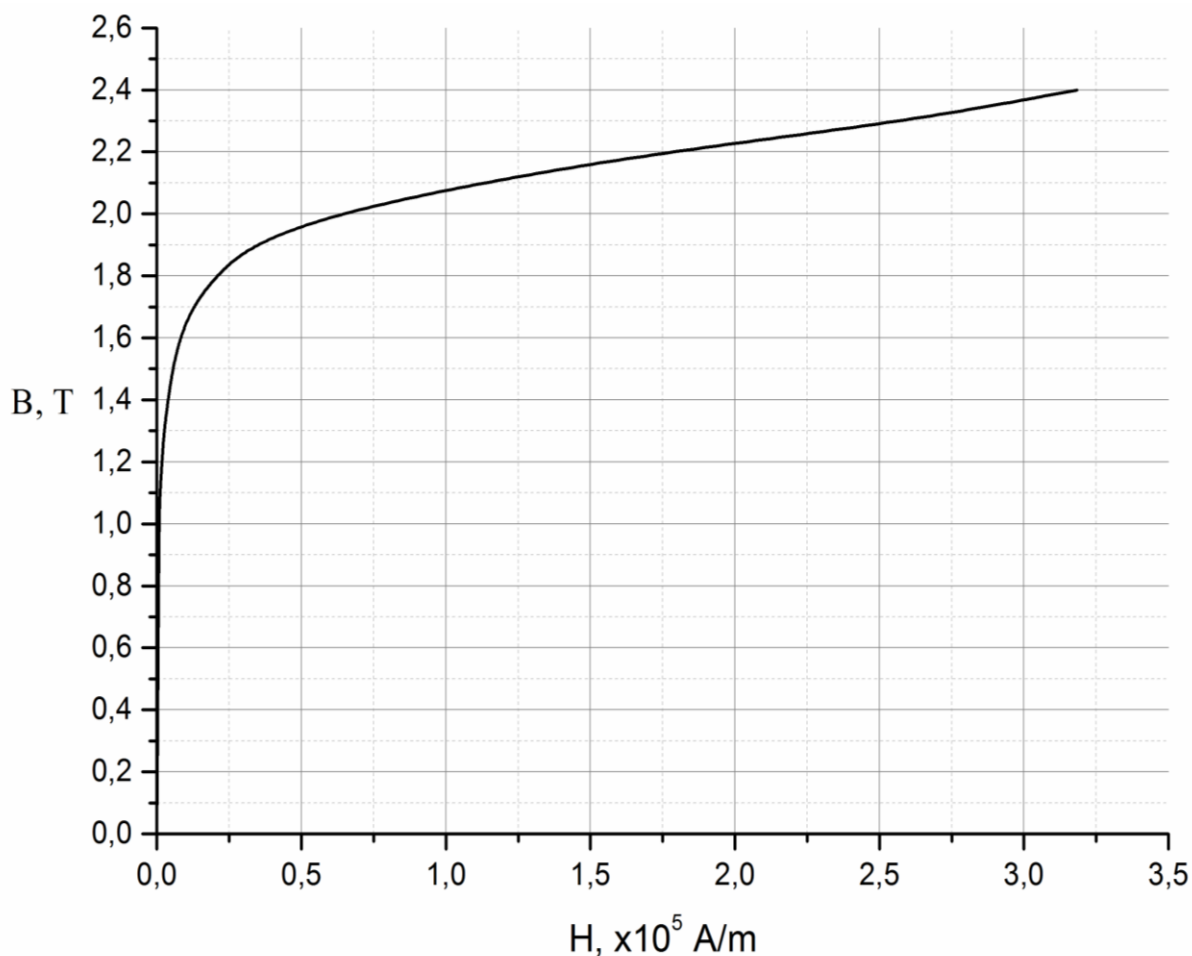


Рис. 3.4. Залежність індукції від напруженості магнітного поля феромагнітних матеріалів електричного двигуна

Для розв'язання нелінійної задачі задавалась похибка $\varepsilon_0 = 1\%$. На рис. 3.5. надано розподіл r -компоненти індукції магнітного поля у робочому зазорі між постійними магнітами та по верхні гладкого статора. Середньоквадратичне відхилення цих залежностей одне від іншого не перевищує 1%. Аналіз результатів,

що надано у табл. 3.1 дозволяє зробити висновок, що розв'язання СЛАР, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь (2.8), (2.9) з ядрами (2.13) та (2.14), методом простої ітерації дає найкращий результат як за кількістю ітерацій розв'язання нелінійної задачі (результат досягається за 8 ітерацій) так і за кількістю ітерацій розв'язання СЛАР на кожному кроці безпосередньо нелінійної задачі. Це приводить до суттєвого скорочення часу розрахунку: в порівнянні зі прямими методами час розрахунку зменшується до 16 разів, а в порівнянні зі ітераційним методом розв'язання СЛАР з неперетвореними ядрами інтегральних рівнянь до 1,4 разу.

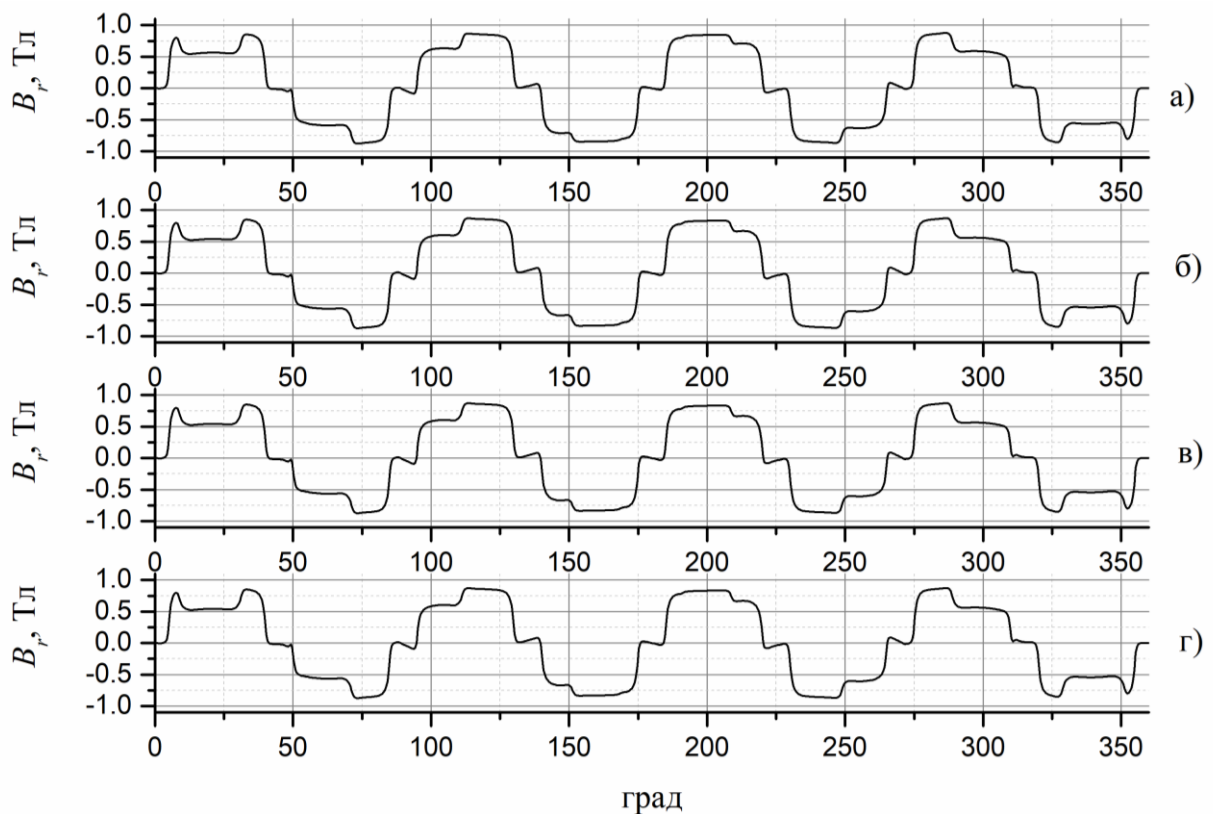


Рис. 3.5 Розподіл r -компоненти індукції магнітного поля у робочому зазорі електричного двигуна

У табл. 3.2 надано аналогічні результати розрахунків, що реалізовані за використанням алгоритму наданого у підрозділі 3.4. Аналіз наданих результатів показує, що використання прямих методів розв'язання СЛАР у даному випадку

менше у 2 разу в порівнянні з використанням аналогічних підходів, що описано у підрозділі 3.3; використання ітераційного методу розв'язання СЛАР у даному випадку менш але порівняно з результатами, що описано у підрозділі 3.3.

Таблиця 3.2

Результати розрахунків за алгоритмом, що надано у підрозділі 3.4.

Крок розв'язання нелінійної задачі	а)		б)		в)				г)			
	ε_{μ} , %	ε_H , %	ε_{μ} , %	ε_H , %	Кількість ітерацій	Кількість ітерацій	ε_{μ} , %	ε_H , %	Кількість ітерацій	Кількість ітерацій	ε_{μ} , %	ε_H , %
1	35	63	36	63	41	7	37	61	41	7	37	61
2	18	49	18	49	39	6	22	48	39	6	36	29
3	30	29	30	29	37	6	36	29	37	6	36	29
4	19	14	19	14	29	6	26	14	29	6	26	14
5	17	6,5	17	6,5	21	6	27	7	21	6	27	7
6	13	3,4	13	3,4	17	5	21	3,7	17	5	21	3,7
7	9,3	2,3	9,3	2,3	13	4	11	2,1	13	4	11	2,1
8	7,2	1,7	7,2	1,7	8	4	7,3	1,3	8	4	7,3	1,3
9	6,4	1,3	6,4	1,3	3	4	3,9	0,5	3	4	3,9	0,5
10	6,9	0,9	6,9	0,9								
Час розрахунків, с	6526		6655		1187				854			

На рис. 3.6 надано розподіл відносної магнітної проникності в перерізі статора електричного двигуна, а на рис. 3.7 надано графік залежності відносної

магнітної проникності вдовж кола, що проходить скрізь перекладки, з радіусом $r = 80,5$ мм, де позначено місця розташування постійних магнітів та перекладок. Як бачимо з наведених залежностей у крайових зонах перекладок відносна магнітна проникність зменшується до $6-10\mu_0$. Тобто тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором входять у стан магнітного насичення, що суттєво знижує шунтування магнітного потоку струмів статора і постійних магнітів цими перекладками. Для інших положень ротора ситуація аналогічна.

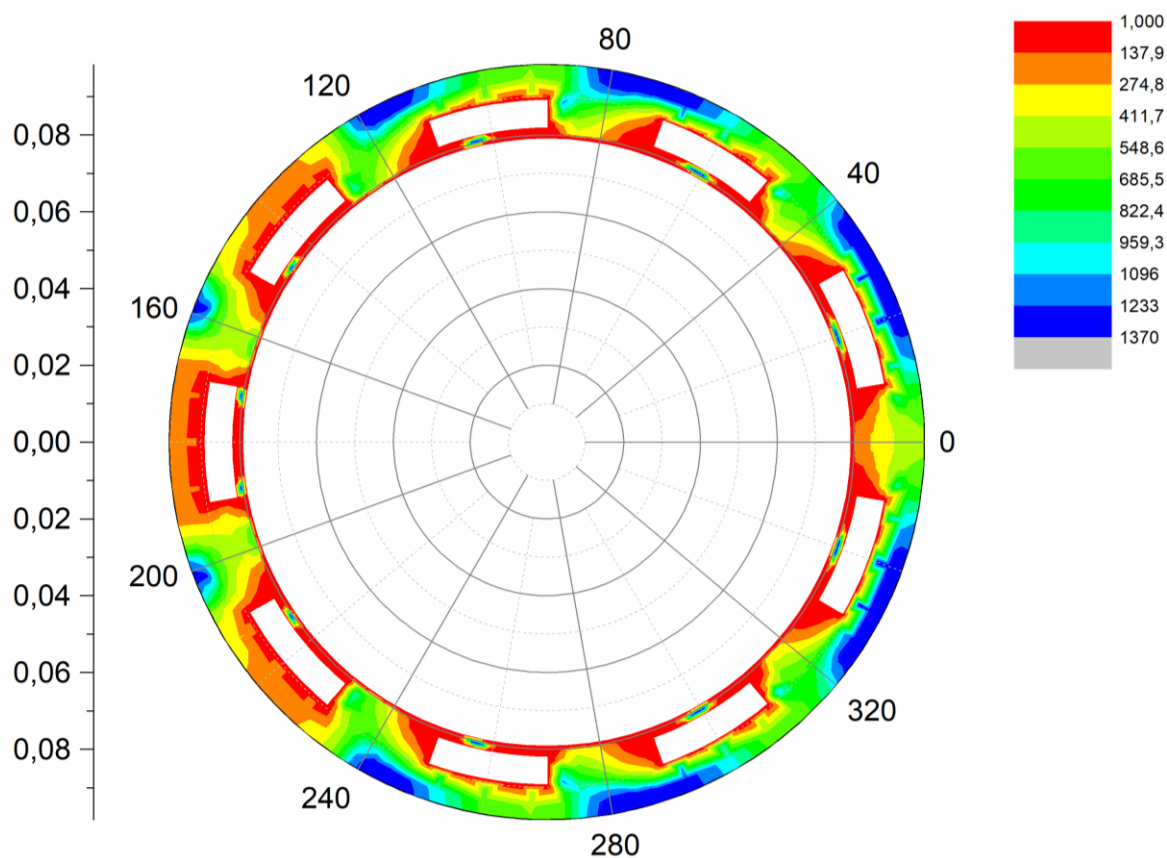


Рис. 3.6 Розподіл відносної магнітної проникності у перерізі статора електричного двигуна

Враховуючи результати розрахунку розподілу відносної магнітної проникності (рис. 3.6 та рис. 3.7) найбільша нелінійність магнітних властивостей середовища проявляється в феромагнітних перекладках. Тому було виконано

розрахунок магнітного поля у перерізі електричного двигуна у допустимій постійній магнітній проникності у областях крім феромагнітних перекладінок, а для останніх враховувалась нелінійна залежність $\mu(H)$.

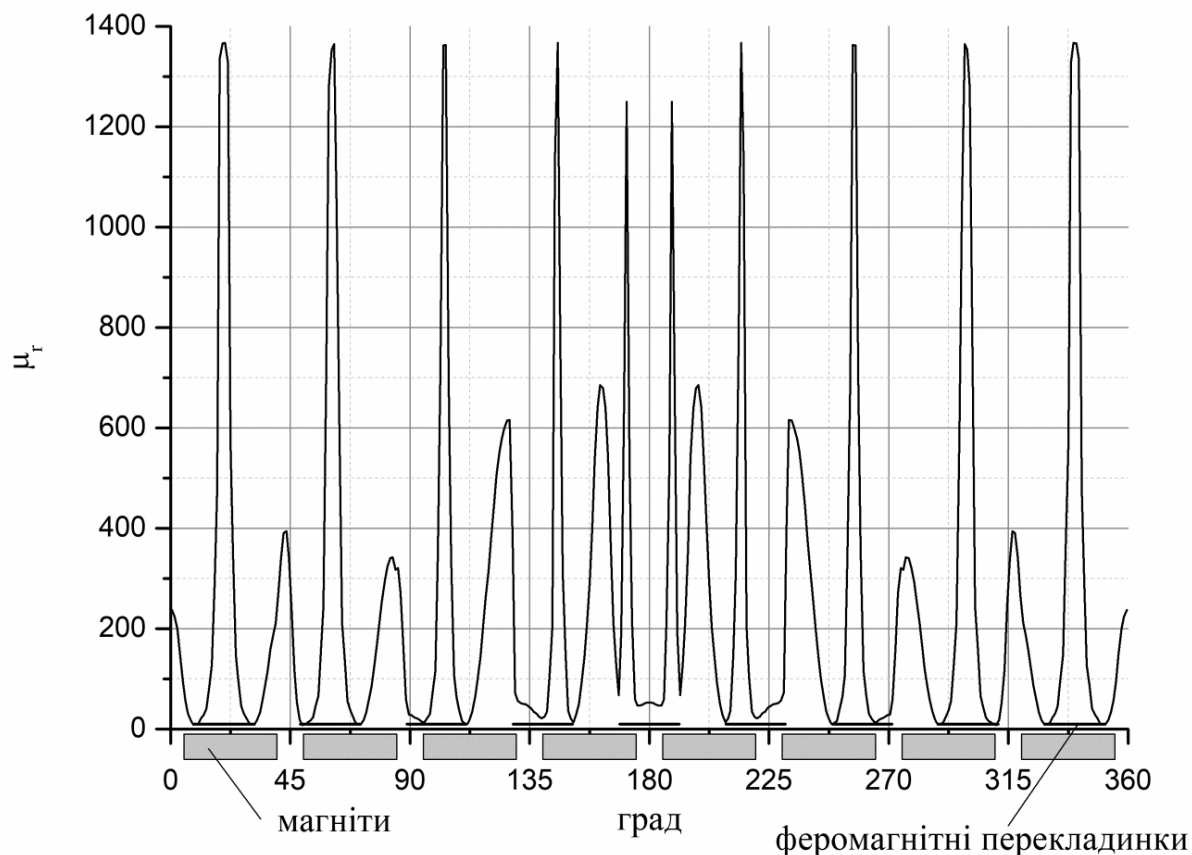


Рис. 3.7 Графік залежності відносної магнітної проникності вдовж кола, що проходить скрізь перекладінки, з радіусом $r = 80,5$ мм

На рис 3.8 наведено графіки розподілу індукції магнітного поля у робочому зазорі електричного двигуна для випадку, коли всюди у феромагнітних елементах враховувалась залежність $\mu(H)$ (суцільна лінія), та для випадку, коли нелінійні властивості феромагнітного матеріалу враховувалось тільки у перекладінках (пунктирна лінія), а для іншого феромагнітного матеріалу задавалось $\mu = 500\mu_0$.

В обох випадках розв'язання СЛАР, до якої зводиться перетворена система інтегральних рівнянь (2.8), (2.9) з ядрами (2.13) та (2.14), виконувалась методом

простої ітерації. Середньоквадратичне відхилення другої залежності від першої складає до 3,5 %, що є прийнятним для подальшого аналізу електромагнітних процесів у електричному двигуні.

При цьому як і раніше границя магнітопроводу L розбивалась на 4032 елементарних ділянок, переріз ротора та статора S на 876 елементарних площинок для розв'язання першої задачі та на 297 елементарних площинок для розв'язання другої задачі, що менше у 3 рази.

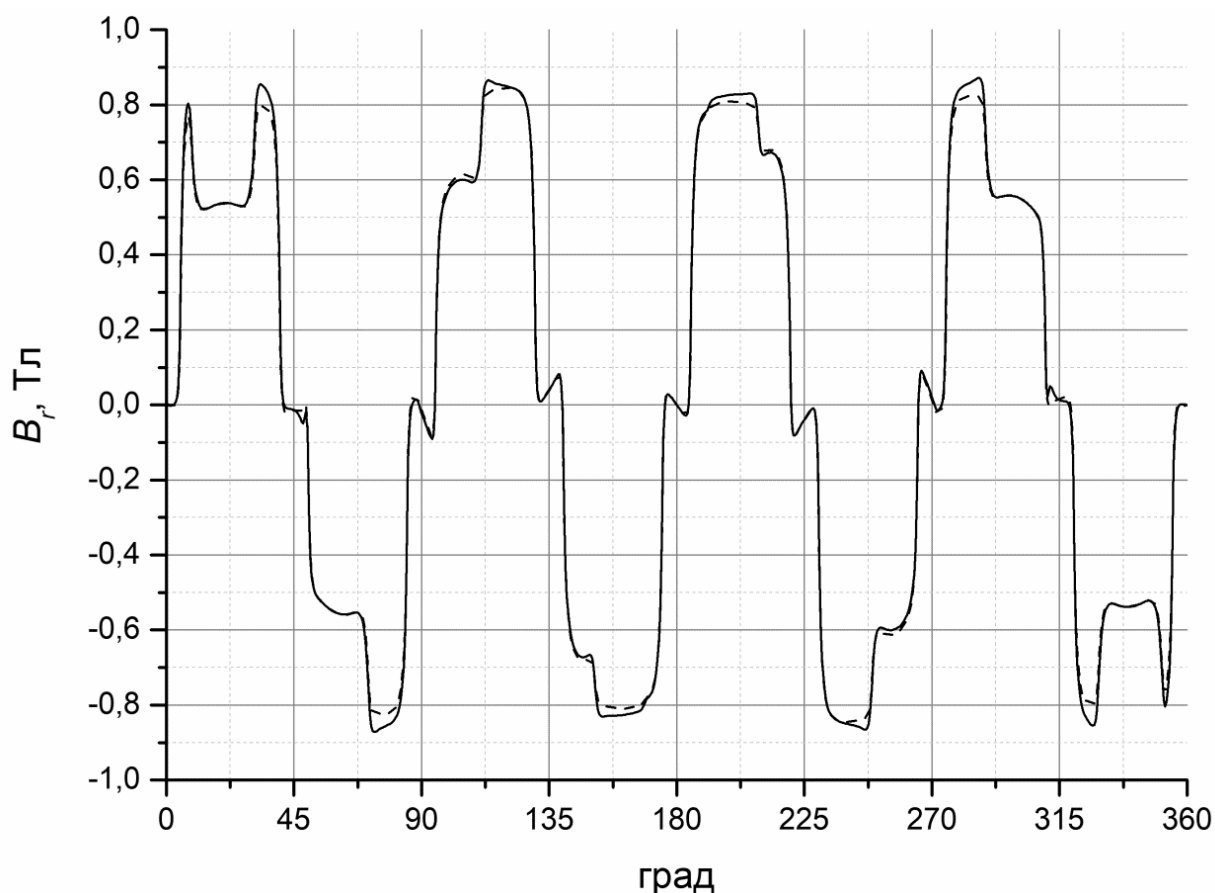


Рис 3.8 Графіки розподілу індукції магнітного поля у робочому зазорі електричного двигуна

Було виконано дослідження впливу товщини феромагнітних перекладинок на їх шунтуючі властивості. З рис. 3.9, де надано залежність від товщини перекладинок Δr відношення магнітного потоку Φ_2 через поперечний переріз

перекладинок у їх середині до магнітного потоку Φ_1 через основний полюс статора (у відсотках), бачимо, що при товщині перекладинок до 1 мм тільки до 6 % магнітного потоку проходить через них.

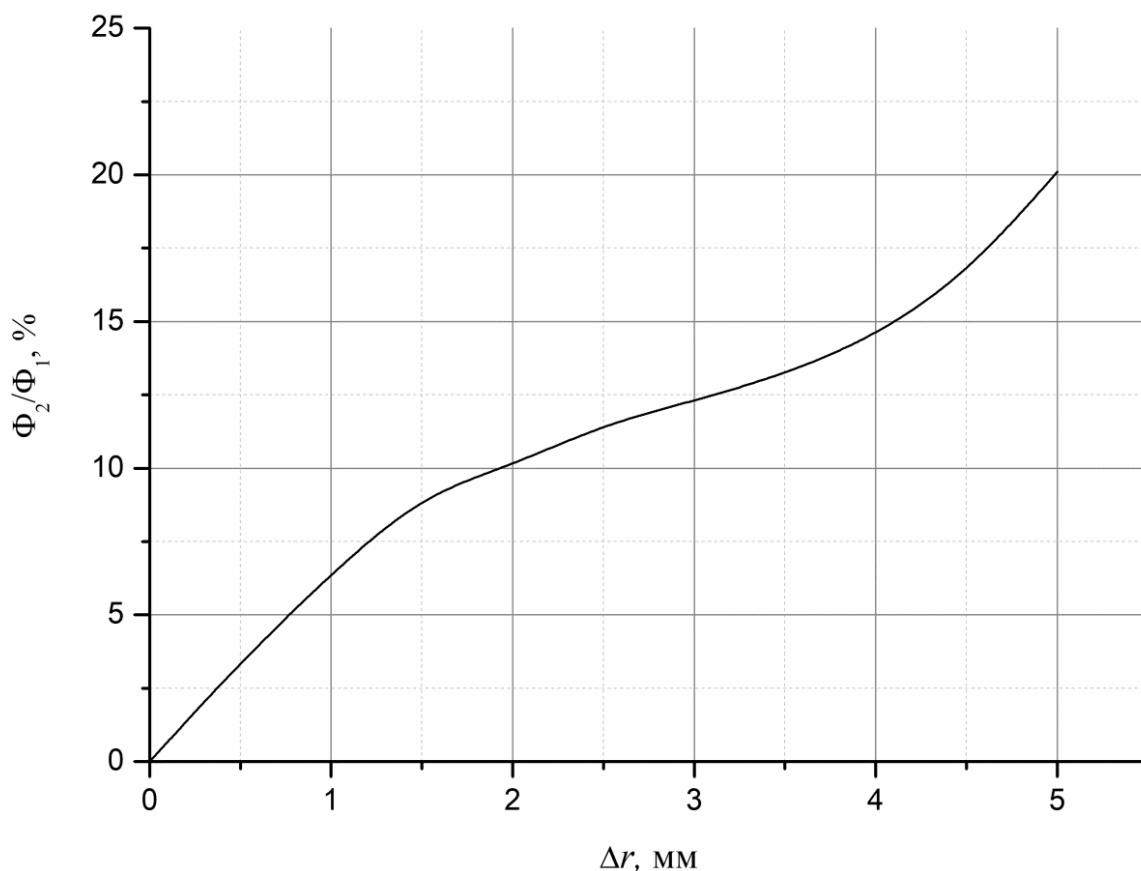


Рис. 3.9 Залежність від товщини перекладинок Δr відношення магнітного потоку Φ_2 через поперечний переріз перекладинок у їх середині до магнітного потоку Φ_1 через основний полюс статора (у відсотках)

Також було проведено порівняльний аналіз розрахунків, виконаних з тією ж самою постановкою задачі, за допомогою програмного продукту COMSOL Multiphysics [31], середньоквадратичне відхилення індукції магнітного поля в робочому зазорі електричного двигуна в порівнянні з методом інтегральних рівнянь не перевищує 5,5%.

Висновки до розділу 3

Розроблено методику розрахунку характеристик магнітного поля в електротехнічних пристроях з тонкими перекладками або насиченими в магнітному відношенні областями, яка дозволяє виявити області з явно вираженою насиченістю феромагнітних елементів, вважати їх магнітну проникність як функцію $\mu(H)$, а для іншої частини феромагнітних елементів задати постійну магнітну проникність. Це дозволяє складну задачу розрахунку характеристик магнітного поля в електротехнічному пристрої з феромагнітними елементами з нелінійною магнітною характеристикою звести до задачі розрахунку магнітного поля в кусково-однорідному середовищі з постійними магнітними проникностями для одних областей, та враховувати нелінійності в окремих локалізованих областях. Вирішення першої задачі зводиться до розв'язання одного інтегрального рівняння для густини простого шару магнітних зарядів, розподілених тільки по границі феромагнітних тіл з різною магнітною проникністю, для другої застосовуються два інтегральних рівняння: для густини простого шару електричних зарядів на границі феромагнітних тіл та для густини об'ємних електричних зарядів у перерізі феромагнітних тіл. Це істотно зменшує область пошуку розв'язку на відміну від методу скінченних різниць або методу скінченних елементів, де розв'язок шукається, власне кажучи, в усьому необмеженому просторі.

Посилання [31, 202] див. список використаних джерел стор. 139, 158.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі з використанням методу інтегральних рівнянь на підставі отриманих теоретичних і експериментальних результатів розв'язано актуальне наукове завдання подальшого розвитку методу вторинних джерел для розрахунку характеристик магнітного поля в нелінійних середовищах у напрямку зменшення кількості складових у ядрах інтегральних рівнянь, які містять функцію градієнту від магнітної проникності, та подальшого явного виразу цієї функції через густини джерел магнітного поля, що має суттєве значення для розвитку методів розрахунку електромагнітних полів та має важливе значення для галузі теоретична електротехніка.

Виконані в дисертаційній роботі дослідження дозволили сформулювати наступні висновки:

1. Проведений аналіз літературних джерел виявив необхідність вдосконалення існуючого методу розрахунку магнітного поля у нелінійних середовищах з використанням методу вторинних джерел у напрямку зменшення кількості складових у ядрах інтегральних рівнянь, які містять функцію градієнту від магнітної проникності, та подальшого явного виразу цієї функції через густини джерел магнітного поля.

2. Вдосконалено математичну модель електромагнітних процесів у нелінійних феромагнітних середовищах, в основі якої лежить метод вторинних джерел, у напрямку спрощення виду ядер інтегральних рівнянь для густини об'ємних електричних зарядів за рахунок зменшення кількості складових, що містять $grad_{\rho\mu}(Q)$, що дозволило при формуванні додаткових складових в ядрах звести інтегрування по об'єму (перерізу) феромагнітних тіл до інтегрування по їх поверхні (контурі).

3. Розроблено методику розрахунку функції $grad_{\rho\mu}(Q)$ з урахуванням явного представлення напруженості магнітного поля через густини магнітних зарядів, що дозволило процес її апроксимації скінченновимірним аналогом

виконати інтегруванням за джерелами поля, що дозволило зменшити похибку її апроксимації на відміну від процедури чисельного диференціювання безпосередньо функції $\mu(Q)$.

4. Розроблено математичну модель та відповідний розрахунковий метод для чисельного розрахунку магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму з неявнополюсним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та явнополюсним ротором з постійними магнітами, що дозволило врахувати нелінійні властивості феромагнітних елементів.

5. Із використанням чисельних експериментальних досліджень обґрунтовано, що тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором входять у стан магнітного насичення, що суттєво знижує шунтування магнітного потоку струмів статора і постійних магнітів цими перекладками.

6. Проведено порівняльний аналіз розрахунків, виконаних з тією ж самою постановкою задачі, за допомогою програмного продукту COMSOL Multiphysics, середньоквадратичне відхилення індукції магнітного поля в робочому зазорі електричного двигуна в порівнянні з методом інтегральних рівнянь не перевищує 5,5%.

7. Достовірність та обґрунтованість наукових результатів забезпечена коректним та послідовним використанням методів теорії інтегральних рівнянь, результатами їх практичного застосування при розрахунках характеристик магнітного поля в конкретних електротехнічних пристроях, співпадінням отриманих результатів в граничних випадках з відомими результатами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Жильцов А. В., Ликтей В. В. Расчёт магнитного потока от постоянного магнита в форме цилиндра при наличии ферромагнетиков. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2014. Вип. 194(2). С. 122–132.
2. Жильцов А. В., Ликтей В. В. Розрахунок магнітного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2014. Вип. 4. С. 59–70.
3. Жильцов А. В., Ликтей В. В. Розрахунок магнітного поля струмів обмотки статора вентильного двигуна. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2015. Вип. 209(2). С. 174–180.
4. Жильцов А. В., Ликтей В. В. Моделирование магнитного поля у вентильному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2016. Вип. 256. С. 178–186.
5. Zhylytsov A. V., Lyktei V. V. Magnetic field calculation of brushless direct current motor with smooth stator by secondary sources method. *Технічна електродинаміка*. 2018. № 5. С. 7–10.
6. Zhylytsov A., Kondratenko I., Lyktei V., Usenko S. The magnetic field calculation in electromechanical systems with saturated ferromagnetic structural elements | Metoda obliczania charakterystyk pola magnetycznego w układach elektromechanicznych z cienkimi mostkami ferromagnetycznymi. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2020. 97(1). pp. 69–72.
7. Тамм И. Е. Основы теории электричества: Учеб. пособие для вузов. 11-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 616 с.
8. Астахов В. И. Математическое и компьютерное моделирование электромагнитного поля как основа решения задач в электротехнике и

електроенергетике. *Известия вузов. Электромеханика*. 2004. № 6. С. 4–6.

9. Куц І. А. Аналіз методів розрахунку магнітних полів у машинах постійного струму. *Електромеханічні та енергетичні системи, методи моделювання та оптимізації*: матеріали Х Міжнар. наук.-техн. конф. Кременчук, 28-29 березня 2012. С. 363–364.

10. Демирчан К. С., Чечурин В. Л. Машинные расчеты электромагнитных. М.: Высшая школа, 1986. 240 с.

11. Толмачев С. Т., Ильченко А. В. Принцип взаимности для нелинейной анизотропной среды без гистерезиса: теория и практика применения. *Електротехніка і Електромеханіка*. 2020. № 2. С. 40–45.

12. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 336 с.

13. Щерба А. А., Резинкина М. М. Моделирование и анализ электрических полей энергетических объектов. К.: Наукова думка, 2008. 248 с.

14. Волобоев В. П., Клименко В. П. Метод вторичных джерел в електротехніці й погано обумовлені матриці. *Математичні машини і системи*. Київ. 2020. № 4. С. 82–94.

15. Калимов А. Г., Важнов С. А. Совместное использование методов интегральных уравнений и конечных элементов для повышения точности расчета магнитного поля внутри замкнутых экранирующих систем. *Електричество*. 2011. № 9. С. 67–73.

16. Стренг Г., Фикс. Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.

17. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 383 с.

18. Сегерлинд Л. Применения метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.

19. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986. 229 с.

20. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

552 с.

21. Бахвалов Ю. А., Бондаренко А. И. Решение внешних краевых задач при расчете электромагнитных полей методом конечных элементов. *Известия вузов. Электромеханика*. 1983. № 6. С. 5–10.

22. Демирчан К. С., Солнышкин Н. И. Расчет трехмерных магнитных полей методом конечных элементов. *Известия АН СССР*. 1975. № 5. С. 39–49.

23. Чечурин В. Л. Метод магнитных зарядов и его приложение для расчета стационарных электромагнитных полей: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.09.05. Ленинград, 1983. С. 69–73.

24. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках / пер. с англ. М.: Мир, 1984. 494 с.

25. Коген-Далин В. В., Комаров Е. В. Расчет и испытание систем с постоянными магнитами. М.: Энергия, 1977. 243 с.

26. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М.: Энергия, 1970. 376 с.

27. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 800 с.

28. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.

29. Сегерлинд Л. Применения метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.

30. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986. 229 с.

31. COMSOL [Электронный ресурс]: сайт программного продукту. Режим доступа: <https://www.comsol.com/> (дата звернения: 07.04.2023).

32. Ansys [Электронный ресурс]: сайт программного продукту. Режим доступа: <https://www.ansys.com/> (дата звернения: 07.04.2023). Назва з екрану.

33. Демирчан К. С., Солнышкин Н. И. Расчет трехмерных магнитных полей методом конечных элементов. *Изв. АН СССР*. 1975. № 5. С. 39–49.

34. Gupta R., Yoshino T., Saito Y. Finite element solution of the permanent magnet field. *IEEE Trans. on Magn.* 1990. vol.26, № 2. P.383–386.

35. Резинкина М. М. Численный расчет магнитного поля и магнитного момента ферромагнитных тел сложной пространственной конфигурации. *Журнал технической физики*. 2009. Т.79, вып. 8. С. 8–17.

36. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

37. Бахвалов Ю. А., Бондаренко А. И. Решение внешних краевых задач при расчете электромагнитных полей методом конечных элементов. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1983. № 6. С. 5–10.

38. Чистов Е. К. Вариационно-сеточная аппроксимация в бесконечной области. *Изв. вузов. Математика*. 1982. № 10. С. 82–84.

39. Чистов Е. К. Вариационно-сеточные методы решения уравнения Лапласа в бесконечных областях. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1987. № 11. С. 14–20.

40. Лустенберг Г. Е. Ослабление влияния границы на решение внешних электродинамических задач методом конечных элементов. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1993. № 3. С. 12–18.

41. Бахвалов Ю. А., Бондаренко А. И., Бондаренко И. И. Бесконечные и конечные элементы для расчета осесимметричных электрических и магнитных полей «открытых» систем. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1991. № 6. С. 29–32.

42. Бахвалов Ю. А., Бондаренко А. И. Учет особенностей в окрестности угловых точек при расчете электростатических полей методом конечных элементов. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1982. № 10. С. 11–18.

43. Арушанян И. О. Применение метода граничных интегральных уравнений для численного решения задачи Дирихле в областях с угловыми точками. *Вычислительные методы и программирование*. 2000. Т.1. С. 1–7.

44. Арушанян И. О. О численном решении граничных интегральных уравнений второго рода с угловыми точками. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1996. Т. 36, № 5. С. 537–548.

45. Тозони О. В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. К.: Техніка, 1967. 252 с.

46. Тозони О. В., Костюк Э. Н. Численное исследование статического поля в нелинейной среде. *Анализ электрических и электромагнитных систем*. К.: Накова

думка, 1967. С. 5–13.

47. Тозони О. В., Федчун Л. В. О расчете магнитного поля в неоднородных средах. *Анализ электрических и электромагнитных систем*. К.: Наукова думка, 1967. С. 14–20.

48. Тозони О. В. Математические модели для расчета электрических и магнитных полей. К.: Наукова думка, 1964. 271 с.

49. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 295 с.

50. Тозони О. В., Маергойз И. Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. К.: Техніка, 1974. 352 с.

51. Гринберг Г. А. Избранные вопросы теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд. АН СССР, 1948. 727 с.

52. Маергойз И. Д. Итерационные методы расчета статических полей в неоднородных, анизотропных и нелинейных средах. К.: Наукова думка, 1979. 208 с.

53. Петрушенко Е. И. Расчет распределения плотности тока в закрытых токопроводах. *Известия вузов. Электромеханика*. 1964. № 6. С. 647–656.

54. Петрушенко Е. И., Тозони О. В. Расчет поля в магнитных системах переменного тока. *Наука и техника в городском хозяйстве*. Киев: Будівельник, 1965. Вып. 3. С. 3–18.

55. Петрушенко Е. И. Расчет осесимметричных электромагнитных устройств переменного тока: автореф. дисс. ... степени канд. техн. наук: 05.09.05. Киев, 1965. 33 с.

56. Петрушенко Е. И. Постановка задачи по расчету вихревых токов в телах произвольной формы. *Известия вузов. Электромеханика*. 1966. № 11. С. 1181–1184.

57. Петрушенко Е. И. К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы. *Известия АН СССР*. 1966. № 6. С. 59–70.

58. Квачев Г. С., Петрушенко Е. И. Расчет переходных процессов в магнитофугальных двигателях. *Наука и техника в городском хозяйстве*. Киев: Будівельник, 1966. Вып. VII. С. 3–10.

59. Петрушенко Е. И., Квачев Г. С. Расчет переходных процессов в осесимметричных устройствах. *Теоретическая электротехника*. Львов: Львов. Ун-т., 1967. Вып. 3. С. 141–146.

60. Квачев Г. С., Петрушенко Е. И., Бессараб Н. И. О численном решении уравнений динамики магнитофугального двигателя. *Наука и техника в городском хозяйстве*. Киев: Будівельник, 1967. вып. VIII. С. 3–19.

61. Петрушенко Е. И. К расчету статических магнитных полей в нелинейных средах методом интегральных уравнений. *Теоретическая электротехника*. 1967. Вып. 4. С. 131–133.

62. Петрушенко Е. И. К расчету вихревых токов в проводниках сложной формы. *Известия АН СССР*. 1969. № 1. С. 102–115.

63. Петрушенко Є. І. До апроксимації інтегральних рівнянь теорії електромагнітного поля алгебраїчними системами. *Доповіді АН УРСР*. 1969. № 7. С. 618–621.

64. Колесников Э. В. Переходные и стационарные электромагнитные поля магнитопроводов и токопроводов: дис. ... док. техн. наук: 05.09.05 / Ленинградский политехнический институт. Ленинград, 1968. 350 с.

65. Колесников Э. В., Стадник И. П. Расчет трехмерных электромагнитных систем с массивными проводниками. *Труды Новочеркасского политехнического института*. Новочеркасск, 1971. Т. 246. С. 87–97.

66. Астахов В. И. Интегральные уравнения минимальной размерности для вихревых токов в проводящих оболочках и их применение к системам электродинамического подвеса: дис. ... докт. техн. наук: 05.09.03. Новочеркасск, 1986. 224 с.

67. Сипливый Б. Н. Расчет полей в осесимметричных электрических машинах с жидкометаллическим рабочим телом методом интегральных уравнений: дис. ... канд. техн. наук: 05.09.01. Новочеркасск. 1977. 164 с.

68. Стадник И. П. Синтез схем замещения электромагнитных устройств с массивными проводниками: дис. ... канд. техн. наук: 276. Новочеркасск. 1971, 230 с.

69. Михайлов В. М. Импульсные электромагнитные поля. Харьков: Вища школа, 1979. 140 с.

70. Михайлов В. М. Переходной процесс в разрядном контуре конденсатора с массивным одновитковым соленоидом. *Известия АН СССР*. 1974. № 2. С. 79–85.

71. Михайлов В. М. Анализ электромагнитных процессов в разрядном контуре конденсатора с учетом поверхностного эффекта. *Теоретическая электротехника*. 1974. Вып. 17. С. 74–80.

72. Михайлов В. М. Импульсное магнитное поле массивного соленоида, помещенного внутрь проводящей оболочки. *Электричество*. 1974. № 8. С. 35–40.

73. Михайлов В. М., Письменный Э. И. Переходной процесс в разрядном контуре конденсатора с массивным ферромагнитным проводником. *Электричество*. 1975. № 8. С. 58–60.

74. Михайлов В. М. Анализ переходных электромагнитных процессов в устройствах с массивными проводниками. *Электричество*. 1976. № 3. С. 83–86.

75. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. К.: Наукова думка, 1986. 544 с.

76. Боженко А. И., Вильцер Д. Е., Петрушенко Е. И. [и др.] Моделирование на ЦВМ вихревых токов в осесимметричных индукционных нагревателях с учетом симметричности исходного интегрального уравнения. Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1980, 52 с. (Препринт / АН УССР; Ин-т электродинамики; 238).

77. Петрушенко Е. И. К расчету трехмерных магнитных полей в кусочно-однородных средах с помощью векторных интегральных уравнений. *Электронное моделирование*. 1983. № 5. С. 27–32.

78. Пашко А. И., Петрушенко Е. И., Трофимчук Н. Л. [и др.]. Интегральные уравнения для расчета трехмерного магнитного поля ненасыщенного одноэлементного трансформатора тока. *Техническая электродинамика*. 1984. № 5. С. 8–13.

79. Боженко А. И., Петрушенко Е. И. Моделирование на ЭВМ переходных процессов в осесимметричных устройствах с немагнитными проводниками с

учетом симметричности исходного интегро-дифференциального уравнения. Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1984, 51 с. (Препринт / АН УССР; Ин-т электродинамики; 372).

80. Боженко А. И., Петрушенко Е. И. Результаты расчетов переходных процессов в системе «цепь – индуктор – массивный немагнитный осесимметричный проводник». Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1984, 41 с. (Препринт / АН УССР; Ин-т электродинамики; 376).

81. Пашко А. И., Петрушенко Е. И., Трофимчук Н. Л. [и др.]. О численном решении векторного интегрального уравнения для расчета трехмерного магнитного поля ненасыщенного одноэлементного трансформатора тока. *Техническая электродинамика*. 1985. № 2. С. 28–35.

82. Петрушенко Е. И., Пашко А. И., Трофимчук Н. Л. [и др.]. Моделирование на ЭВМ трехмерного магнитного поля линейного одноэлементного трансформатора тока на основе векторного интегрального уравнения. Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1986, 46 с. (Препринт / АН УССР; Ин-т проблем моделирования в энергетике; 34).

83. Петрушенко Е. И., Филиппова Г. А. Моделирование на ЭВМ импульсных электромагнитных процессов в цепи с экранированным токопроводом. Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1989, 38 с. (Препринт / АН УССР; Ин-т проблем моделирования в энергетике; 89-15).

84. Петрушенко Е. И. Моделирование процесса разрядки емкости на осесимметричную немагнитную систему двух массивных закрепленных индукторов на основе суммарных схем. Случай больших зазоров между индукторами. Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1992, 40 с. (Препринт / АН УССР; Ин-т проблем моделирования в энергетике; 92-54).

85. Петрушенко Е. И. Моделирование процесса разрядки емкости на осесимметричную немагнитную систему двух массивных закрепленных индукторов. *Методы математического моделирования в энергетике: сборник научных трудов*. Киев: Наукова думка, 1992. С. 94–115.

86. Петрушенко Е. И. Моделирование процесса разряда емкости на

осесимметричную немагнитную систему двух массивных индукторов, один из которых закреплен, второй поступательно перемещается вдоль оси системы. *Методы математического моделирования в энергетике: сборник научных трудов.* Киев: Наукова думка, 1992. С. 116–124.

87. Петрушенко-Кубала И. Е., Петрушенко Е. И. Метод элементарных соленоидов моделирования трехмерных магнитных полей в устройствах с ферромагнитными сердечниками и обмотками с током. *Электронное моделирование.* 2003. Т. 25, № 5. С. 15–31.

88. Петрушенко-Кубала И. Е., Петрушенко Е. И. К расчету магнитного поля цилиндрического индукционного перемешивателя на основе векторных интегральных уравнений для токов намагниченности. *Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці.* Київ, 2001. Вып. 13. С. 3–19.

89. Петрушенко-Кубала И. Е., Петрушенко Е. И. Об одной интегро-дифференциальной модели трехмерного распределения вихревых токов в жидкой стали ковш-печи при ее индукционном перемешивании в нестационарных режимах. *Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці.* Київ, 2001. Вып. 10. С. 3–9.

90. Петрушенко-Кубала И. Е., Петрушенко Е. И. Преобразование интегро-дифференциальной модели трехмерного распределения вихревых токов в жидкой стали ковш-печи при ее индукционном перемешивании в нестационарных режимах с учетом симметрии характеристик электромагнитного поля относительно плоскости геометрической симметрии системы. *Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України.* Київ, 2001. Вып. 11. С. 3–14.

91. Найдек В. Л., Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок. *Электронное моделирование.* 2004. Т. 26, № 1. С. 125–144.

92. Петрушенко Е. И. Об алгоритмах компьютерной реализации двумерной

интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок. *Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2004. № 24. С. 41–59.

93. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем. *Электронное моделирование*. 2005. Т. 27, № 4. С. 57–73.

94. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. [и др.] Моделирование двумерного распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе МНЛЗ круглого сечения с двухобмоточным индукционным перемешивателем при наличии угла между осями сечений обмоток. Часть 1. *Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2005. Вып. 30. С. 3–17.

95. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. [и др.] Моделирование двумерного распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе МНЛЗ круглого сечения с двухобмоточным индукционным перемешивателем при наличии угла между осями сечений обмоток. Часть 2. *Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2005. Вып. 31. С. 3–21.

96. Евдокимов В. Ф., Петрушенко Е. И. Интегральные уравнения для симметричных составляющих синусоидальных вихревых токов в сечении системы кристаллизатор – индукционный перемешиватель. *Электронное моделирование*. 2005. Т. 27, № 1. С. 73–96.

97. Дубоделов В. И., Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П. [и др.] Осесимметричная интегральная модель распределения синусоидальных токов в

системе кристаллизатор с погружным стаканом – устройство электромагнитного торможения машины непрерывного литья заготовок круглого сечения и алгоритмы ее компьютерной реализации. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2005. Вып. 34. С. 3–20.

98. Романович С. С. Регуляризация интегральных уравнений в задачах электро- и магнитостатики. *Техническая электродинамика*. 1986. № 1. С. 44–49.

99. Романович С. С. Градиенты поля осесимметричных токов и зарядов. *Известия вузов. Электромеханика*. 1983. № 10. С. 26–28.

100. Воробьев В. М., Романович С. С., Федчун Л. В. О численном расчете устройств магнитного подвеса. *Известия вузов. Электромеханика*. 1978. № 7. С. 718–723.

101. Романович С. С. О расчете трехмерного поля простого слоя. *Проектирование технических устройств ЭВМ и систем*. К.: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1984. С. 55–60.

102. Романович С. С., Иванова С. Л., Коковина С. Н. Кубическая аппроксимация плотности вторичных источников поля на прямоугольном граничном элементе. *Математические машины и системы*. 1997. № 1. С. 72–77.

103. Романович С. С. К вопросу о повышении точности решения магнитостатической задачи. К.: Ин-т кибернетики, 1985. 27 с.

104. Толмачев С. Т., Ильченко А. В. О способе учета магнитных свойств гистерезисных материалов. *Изв. АН СССР*. 1977. № 3. С. 90–98.

105. Толмачев С. Т. Интегральные уравнения магнитостатики. *Изв. АН СССР*. 1978. № 3. С. 113–123.

106. Толмачев С. Т., Ильченко А. В. Численное моделирование задач магнитостатики в гистерезисных средах. *Изв. АН СССР*. 1978. № 5. С. 65–72.

107. Толмачев С. Т. К расчету квазистатических полей в гистерезисных средах. *Изв. АН СССР*. 1980. № 1. С. 105–118.

108. Толмачев С. Т. Расчет магнитных полей в нелинейных анизотропных средах. *Электричество*. 1980. № 9. С. 7–13.

109. Толмачев С. Т. Численный расчет намагниченности сложной

электромагнит-ной системы с учетом векторного гистерезиса и наследственных свойств среды. *Техническая электродинамика*. 1981. № 5. С. 11–16.

110. Толмачев С. Т. Магнитное поле в неоднородно-анизотропной среде. *Изв. АН СССР*. 1982. № 4. С. 64–74.

111. Толмачев С. Т. Математическая модель гистерезиса ферромагнетиков. *Изв. АН СССР*. 1983. № 5. С. 43–53.

112. Толмачев С. Т. Специальные методы решения задач магнитостатики. К.: Вища школа, 1983. 166 с.

113. Ильченко А. В., Смолянский П. С., Толмачев С. Т. Метод векторных интегральных уравнений для задач магнитостатики и его численная реализация. *Изв. АН СССР*. 1988. № 3. С. 128–132.

114. Толмачев С. Т., Ильченко А. В., Рожненко Ж. Г. Математическое моделирование магнитного поля с учетом нелинейных анизотропных свойств среды. *Вісник Національного технічного університету ХПІ*. 2006. № 36. С. 128–135.

115. Михайлов В. М. Расчет электрических и магнитных полей с помощью интегральных и интегродифференциальных уравнений. К.: УМК ВО, 1988. 60 с.

116. Михайлов В. М., Чунихин К. В. Об электростатической аналогии магнитостатического поля в неоднородной намагничивающейся среде. *Електротехніка і електромеханіка*. 2017. № 5. С. 38–40.

117. Михайлов В. М., Чунихин К. В. Тестирование численного решения задачи определения источников магнитостатического поля в намагничиваемой среде. *Електротехніка і електромеханіка*. 2017. № 6. С. 42–46.

118. Стадник И. П. Численный метод решения задач об обтекании диэлектрической пластины постоянным током. *Магнитная гидродинамика*. 1977. № 2. С. 69–75.

119. Лопатиков В. И., Стадник И. П., Богуславский А. С. Расчет эквивалентной системы с токовым обтекателем прямоугольной формы. *Морские гидрофизические исследования*. 1978. № 1. С. 117–120.

120. Стадник И. П., Телегин А. П. Неполное обтекание пластины постоянным током. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1979. № 8. С. 670–676.

121. Стадник И. П. Итерационный метод решения интегральных уравнений первого рода. Метод интегральных уравнений в задачах магнитостатики. Киев: Ин-т математики, 1985, С. 21–37. (Препринт / АН УССР; Ин-т математики; 85.89).

122. Стадник И. П. О существовании решений интегральных уравнений первого рода. Метод интегральных уравнений в задачах магнитостатики. Киев: Ин-т математики, 1985, С. 3–20. (Препринт / АН УССР; Ин-т математики; 85.89).

123. Стадник И. П. К обоснованию численного метода решения задачи об обтекании диэлектрической пластины постоянным током. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1985. № 2. С. 17–24

124. Телегин А. П., Стадник И. П. Расчет устойчивого состояния цилиндрического магнитного домена вблизи аппликации. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1985. № 9. С. 12–19.

125. Милюков В. В., Стадник И. П. Расчет емкости системы двух пластин сложной формы. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1986. № 3. С. 5–13.

126. Стадник И. П. Методы и алгоритмы синтеза магнито- и электростатических полей: дисс. ... док. тех. наук: 05.09.05. Симферополь. 1987. 369 с.

127. Телегин А. П., Стадник И. П. Решение интегральных уравнений магнитостатики методом конечных элементов. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1987. № 11. С. 44–49.

128. Милюков В. В., Стадник И. П. Два численных алгоритма расчета емкостей пластин. *Тезисы докладов и сообщений I Всесоюзной конференции по теоретической электротехнике*. Ташкент. 1987. С. 199–200.

129. Стадник И. П. Системы линейных алгебраических уравнений в задачах синтеза магнитных систем и геометрический метод их решения. Киев: Ин-т математики, 1989, 60 с. (Препринт / АН УССР; Ин-т математики; 89.63).

130. Стадник И. П., Парменов О. И. Метод расчета магнитных полей в нелинейных магнетиках. Киев. 1992. 7 с.

131. Стадник И. П., Парменов О. И. Моделирование процесса размагничивания магнита с одноосной анизотропией из состояния насыщения. *Изв.*

вузов. *Электромеханика*. 1992. № 4. С. 14–18.

132. Стадник И. П., Парменов О. И. Метод расчета магнитных полей в нелинейных магнетиках. *Тезисы докладов IV научно-технической конференции "Проблемы нелинейной электротехники"*. К.: Ин-т проблем моделирования в энергетике АН Украины, 1992. С. 150.

133. Стадник И. П., Парменов О. И. Численно–аналитическая модель магнитной системы динамической головки громкоговорителя. Киев. 1993. 12 с.

134. Стадник И. П., Жильцов А. В. Повышение эффективности метода последовательных приближений для расчета магнитостатических полей при наличии ферромагнетиков с бесконечной магнитной проницаемостью. *Изв. вузов. Электромеханика*. 2001. № 3. С. 3–7.

135. Стадник И. П., Жильцов А. В. Повышение эффективности расчета магнитостатических полей при наличии ферромагнетиков с бесконечной магнитной проницаемостью методом сведения интегральных уравнений к СЛАУ. *Техническая электродинамика*. 2003. № 6. С. 12–16.

136. Стадник И. П., Жильцов А. В. Повышение эффективности метода интегральных уравнений расчета магнитостатических полей в кусочно–однородных средах. *Техническая электродинамика*. 2003. № 2. С. 3–8.

137. Жильцов А. В., Стадник И. П. Измерение намагниченности однородно намагниченных постоянных магнитов. *Изв. вузов. Электромеханика*. 2000. № 2. С. 83–86.

138. Стадник И. П., Жильцов А. В. Модификация метода интегральных уравнений расчета магнитостатических полей в нелинейных средах. *Техническая электродинамика*. 2003. № 3. С. 3–6.

139. Жильцов А. В. Повышение эффективности расчета магнитных полей в кусочно-однородных линейных и нелинейных средах методом интегральных уравнений: дис. ... канд. техн. наук: 05.09.05 / Таврический национальный ун-т им. В. И. Вернадского. Симферополь. 2004. 155 с.

140. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Двумерная интегральная модель распределения синусоидальных токов и

электродинамических усилий в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель. *Электронное моделирование*. 2006. Т. 28, № 2. С. 3–16.

141. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Блочный алгоритм компьютерной реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель машины непрерывного литья блюмов и слябов. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України: Моделювання та інформаційні технології*. Київ, 2006. Вып.36. С. 30–39.

142. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Двумерная интегральная электромагнитогидродинамическая модель движения жидкой стали в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель. *Электронное моделирование*. 2006. Т.28, № 6. С. 105–114.

143. Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Двумерная интегральная модель расчета температуры в сечении кристаллизатора машины непрерывного литья заготовок. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2006. Вып. 36. С. 3–13.

144. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Кондратенко И. П. [и др.] Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель с массивным магнитопроводом. *Электронное моделирование*. 2007. Т. 29, № 2. С. 3–15.

145. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. [и др.] Двумерная интегральная электромагнитно-гидродинамическая модель распределения электродинамических усилий и скоростей в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок. Часть 1. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України: Моделювання та інформаційні технології*. Київ, 2007. Вып. 40. С. 3–16.

146. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. [и др.] Двумерная интегральная электромагнитногидродинамическая модель распределения электродинамических усилий и скоростей в системе кристаллизатор –

индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок. Часть 2. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України: Моделювання та інформаційні технології*. Київ, 2007. Вып. 41. С. 7–24.

147. Жильцов А. В. Интегро-дифференциальная модель для расчета вихревых токов и электродинамических усилий в электротехнических устройствах с жидкими проводниками, состоящими из соосно расположенных тел вращения. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вып. 39. С. 3–12.

148. Жильцов А. В. Интегро-дифференциальная модель для расчета поля скоростей в жидком проводнике электротехнического устройства, состоящего из соосно расположенных тел вращения. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вып. 38. С. 3–9.

149. Дубоделов В. И., Кучаев А. А., Жильцов А. В. [и др.] Численное моделирование двумерного распределения поля скоростей в жидкой стали в системе кристаллизатор МНЛЗ – двухобмоточный индукционный перемешиватель. *Металл и литье Украины*. 2007. № 5. С. 50–54.

150. Жильцов А. В., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И. Математичне моделювання двовимірного розподілу температури в перерізі кристалізатора МБЛЗ з рідкою сталлю при впливі системи обертових магнітних полів. *Металл и литье Украины*. 2007. № 8. С. 17–20.

151. Жильцов А. В., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И. Интегро-дифференциальная модель для расчета диффузионных процессов в железо-углеродистых расплавах при воздействии электромагнитного поля. *Процессы литья*. 2007. № 5. С. 64–69.

152. Жильцов А. В. Двумерная интегро-дифференциальная модель для расчета вихревых токов в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель с нелинейным массивным магнитопроводом. *Электронное моделирование*. 2007. Т. 29, № 6. С. 37–46.

153. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Моделирование поля скоростей в сечении круглой заготовки МНЛЗ методом интегральных

уравнений. I. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вып. 43. С. 3–17.

154. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Моделирование поля скоростей в сечении круглой заготовки МНЛЗ методом интегральных уравнений. II. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вып. 44. С. 3–18.

155. Жильцов А. В. Моделирование переходных МГД процессов в электротехнических устройствах с жидким проводником и нелинейным массивным магнитопроводом на основе суммарных схем. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вып. 42. С. 3–22.

156. Жильцов А. В. Математическая модель нестационарного гидродинамического процесса в кристаллизаторе МНЛЗ на основе интегро-дифференциальных уравнений. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вып. 43. С. 3–14.

157. Жильцов А. В. Расчет вихревых токов в системе кристаллизатор – индукционный перемешиватель МНЛЗ. Режим напряжения. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2008. Вып. 45. С. 3–8.

158. Жильцов А. В. Двумерная интегральная модель для тепловых процессов в системах с жидкими проводниками. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2008. Вып. 46. С. 3–11.

159. Евдокимов В. Ф., Кондратенко И. П., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И., Ращепкин А. П., Рыбалкин Е. А. Расчет электромагнитных и тяговых характеристик коаксиально-линейного индукционного двигателя электрического вибратора методом интегральных уравнений. *Электронное моделирование*. 2008. Т.30, № 4. С. 85–96.

160. Жильцов А. В. Математическая модель неустановившегося магнитогидродинамического процесса в осесимметричных электротехнических устройствах. *Электронное моделирование*. 2009. Т. 31, № 1. С. 3–20.

161. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Петрушенко Е. И. Трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов в системе ковш-печь –

индукционный перемешиватель на заданном поле скоростей потоков в расплаве стали. *Электронное моделирование*. 2009. Т. 31, № 2. С. 3–15.

162. Жильцов А. В. Трехмерная интегро-дифференциальная модель для расчета плотности вихревых токов в электротехнических устройствах с жидкими проводниками. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. 2009. Вып.50. С. 36–44.

163. Жильцов А. В. Трехмерная интегро-дифференциальная модель гидродинамического процесса в машине непрерывного литья заготовок. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2009. Вып. 50. С. 32–42.

164. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Максимов С. Ю., Петрушенко Е. И., Прилипко Е. А., Рыбалкин Е. А. Трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов, обусловленных внешним синусоидальным электромагнитным воздействием при дуговой сварке зазора в пластине в режиме тока. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2009. № 51. С. 3–16.

165. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Максимов С. Ю., Петрушенко Е. И., Прилипко Е. А., Рыбалкин Е. А. Трехмерная интегральная модель распределения вихревых токов, обусловленных внешним синусоидальным электромагнитным воздействием при дуговой сварке зазора в пластине в режиме напряжения. *Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України*. Київ, 2009. № 22. С. 137–143.

166. Евдокимов В. Ф., Жильцов А. В., Максимов С. Ю., Петрушенко Е. И., Прилипко Е. А., Рыбалкин Е. А. Трёхмерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов в массивных проводниках при дуговой сварке в импульсном магнитном поле. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2009. № 56. С. 47–57.

167. Жильцов А. В., Сорокин Д. С. Синтез магнитной системы линейного двигателя с постоянными магнитами. *Зб. наук. пр. ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. 2010. № 55. С. 3–11.

168. Жильцов А. В., Сорокин Д. С. Чисельний розв'язок рівнянь динаміки коаксіально -лінійного двигуна з постійними магнітами. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. 2015. № 5. С. 37–45.

169. Жильцов А. В., Кондратенко И. П., Ращепкин А. П., Сорокин Д. С. Математическое моделирование нестационарных электромеханических процессов в коаксиально-линейном двигателе. *Модельовання та інформаційні технології*. 2010. № 2. С. 47–54.

170. Жильцов А. В., Кондратенко И. П., Ращепкин А. П., Сорокин Д. С. Математическое моделирование нестационарных электромеханических процессов в коаксиально-линейном двигателе с массивным магнитопроводом. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2010. № 14. С. 124–127.

171. Zhiltsov A., Sorokin D. The calculation of the magnetic field in the working area of the linear motor with permanent magnets. *СРЕЕ'2015 Матеріали 2015 16-ї Міжнародної конференції «Обчислювальні проблеми електротехніки»*. Львів, 2-5 вересня 2015. С.252–255.

172. Zhiltsov A., Kondratenko I., Sorokin D. Mathematical modelling of nonstationary electromechanical processes in Coaxial-Linear Engine. *Econtechmod*. 2012. № 2. p. 69–73.

173. Zhiltsov A., Sorokin D. Numerical calculation of magnetic field in the work area linear permanent magnet motor with a massive conductor in by the integral equations method. *Енергетика і автоматика*. 2015. URL: <http://journals.nubip.edu.ua/index.php/Energiya/article/view/5759> (дата звернення 30.03.2023).

174. Кондратенко І. П., Божко І. В., Жильцов А. В., Васюк В. В. Електрофізичні процеси в системах оперативного неруйнівного визначення залишкових напружень. *Збірник наукових праць Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. Кременчуг, 2011. Вип. 1/2011(1). С. 234–235.

175. Кондратенко І. П., Божко І. В., Жильцов А. В., Васюк В. В. Математичне моделювання електрофізичних процесів в системах оперативного неруйнівного визначення залишкових напружень. *Технічна електродинаміка*. Київ, 2012. Вип. 3. С. 21–22.

176. Кондратенко І. П., Божко І. В., Жильцов А. В., Васюк В. В.

Дослідження електрофізичних процесів у електродній системі неруйнівного визначення залишкових напружень. *Цільова комплексна програма НАН України «Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій споруд та машин»*: збірник наукових статей за результатами, отриманими в 2010-2012 рр. К.: Інститут електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України, 2012. С. 420–425.

177. Кондратенко І. П., Жильцов А. В., Васюк В. В. Тривимірна математична модель процесу розряджання ємності на електромагнітну систему з послідовно з'єднаних котушки індуктивності, електроду і неферромагнітної пластини. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2013. Вип. 184, ч.1. С. 94–104.

178. Кондратенко І. П., Божко І. В., Жильцов А. В., Васюк В. В. Методи визначення залишкових напружень. *Праці Таврійського державного агротехнічного університету*. Мелітополь: ТДАТУ, 2013. Вип. 13. Т.2. С. 127–135.

179. Жильцов А. В., Кондратенко І. П., Васюк В. В. Розрахунок параметрів контура для створення притискаючого зусилля в електротехнічному комплексі для зниження залишкових напружень. *Енергетика і автоматика*. 2014. № 4. С. 53–64. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/eia_2014_4_8 (дата звернення 30.03.2023).

180. Kondratenko I. P., Vasyuk V. V., Zhiltsov A. V. Modeling of electromagnetic processes in electro-technical complexes for reducing residual stresses. *Проблеми енергоресурсозбереження в електротехнічних системах*. Кременчук: КрНУ, 14-16 травня 2014. Вип. 1/2014 (2). С. 136–138.

181. Лобанов Л. М., Кондратенко І. П., Жильцов А. В., Карлов О. М., Пашин М. О., Васюк В. В., Ящук В. Я. Нестационарні електрофізичні процеси в системах зниження залишкових напружень зварних з'єднань. *Технічна електродинаміка*. Київ, 2016. Вип. 3. С. 21–22.

182. Пеккер М. И., Пеккер И. И. Об оценке точности решения задач магнитостатики. *Электричество*. 1975. № 4. С.87–89.

183. Пеккер И. И. К расчету магнитных систем методом интегрирования по источникам поля. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1968. № 9. С. 857–860.

184. Пеккер И. И. Расчет магнитных систем методом интегрирования по

источни-кам поля. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1964. № 9. С. 41–47.

185. Пеккер М. И., Пеккер И. И. О выполнении граничных условий при расчете магнитных систем методом интегрирования по источникам поля. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1973. № 8. С. 904–909.

186. Пеккер И. И., Пеккер И. И., Кирсанов А. Г. Расчет магнитного тора с воздушным зазором методом интегрирования по источникам поля. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1975. № 1. С. 11–15.

187. Курбатов П. А., Аринчин С. А. Численный расчет электромагнитных полей. М.: Энергоатомиздат, 1984. 168 с.

188. Курбатов П. А. Упрощенный метод расчета магнитных систем с редкоземельными магнитами и тонкой ненасыщенной арматурой. *Электричество*. 1976. № 12. С. 63–64.

189. Курбатов П. А. Метод ограниченных областей для решения задач нелинейной магнитостатики. *Сборник научных трудов Московского энергетического ин-та*. Москва, 1986. № 118. С. 31–37.

190. Кирсанов А. Г. Расчет трехмерных магнитных полей в тороидальных магнитопроводах с учетом нелинейных свойств материала магнитопровода. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1992. № 4. С. 9–13.

191. Кирсанов А. Г., Никитенко А. Г., Богаров В. И., Кирсанова Г. А. Расчет магнитного поля и тяговых характеристик электромагнита подвеса. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1985. № 11. С. 83–89.

192. Кирсанов А. Г. Расчет магнитных полей в тороидальных сердечниках с учетом внешних источников. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1983. №9. С.21–25.

193. Тракай В. Г. Расчет осесимметричных магнитных полей в ферромагнитных средах. *Изв. АН СССР*. 1980. № 1. С. 87–97.

194. Подольцев А. Д. Граничные интегральные уравнения для расчета электромагнитного поля в электрической машине с массивным зубчатым ротором. *Техническая электродинамика*. 1982. № 4. С. 11–16.

195. Стадник И. П., Филиппов Д. М. Метод СЛАУ расчета статических плоскопараллельных полей в кусочно-однородных средах (вторичные источники:

простой слой токов; кусочно-линейная аппроксимация). *Техн. електродинаміка*. 2008. № 5. С. 12–17.

196. Филиппов Д. М., Стадник И. П. Методика расчета переменного во времени магнитного поля в нелинейной среде с использованием граничных интегральных уравнений. *Известия вузов. Электромеханика*. 2014. № 6. С. 5–10.

197. Стадник И. П., Филиппов Д. М. Метод интегральных уравнений для расчета вихревых токов в движущихся протяженных ферромагнитных проводниках с иллюстрацией на линейном асинхронном электродвигателе. *Техн. електродинаміка*. 2010. № 3. С. 14–20.

198. Филиппов Д. М. Развитие метода вторичных источников для моделирования плоскопараллельного магнитного поля электромагнитных систем: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.09.05. Харьков, 2013. 20 с.

199. Денисов П. А. Применение потенциала двойного слоя при расчете магнитного поля в нелинейной среде. *Известия вузов. Электромеханика*. 2015. № 4. С. 12–16.

200. Подгорный Д. Э. Расчет магнитных полей в магнитопроводах трансформаторного тока. *Изв. вузов. Электромеханика*. 1996. № 1–2. С. 24–28.

201. Жильцов А. В., Ликтей В. В. Крайова задача для тривимірного магнітного поля з урахуванням неоднорідності магнітних властивостей середовища. *Проблеми енергоресурсозбереження в електротехнічних системах*. Кременчук: КрНУ, 14-16 травня 2014. Вип. 1/2014(2). С. 124–126.

202. Матюк В. Ф., Осипов А. А. Математические модели кривой намагничивания и петель магнитного гистерезиса. Часть I. *Неразрушающий контроль и диагностика*. 2011. № 2. С. 3–35.

ДОДАТОК А

**СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА
ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Жильцов А. В., Ликтей. В. В. Расчёт магнитного потока от постоянного магнита в форме цилиндра при наличии ферромагнетиков. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2014. № 194. С. 122–132. (Особистий внесок – розв'язано задачу розрахунку магнітного поля від однорідно-намагніченого постійного магніту, що розташований між двома ферромагнітними тілами циліндричної форми).

2. Жильцов А. В., Ликтей. В. В. Розрахунок магнітного поля у вентиляльному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. 2014. № 4. С. 59–70. (Особистий внесок – з використанням методу вторинних джерел розроблено дво- та тривимірну математичні моделі для розрахунку характеристик магнітного поля у вентиляльному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики).

3. Жильцов А. В., Ликтей. В. В. Розрахунок магнітного поля струмів обмотки статора вентиляльного двигуна. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2015. № 209 (2). С. 174–180. (Особистий внесок – виведено аналітичні формули для розрахунку плоскопаралельного стаціонарного магнітного поля струмів, розміщених у пазах криволінійної трапецеїдальної форми статора вентиляльного двигуна).

4. Жильцов А. В., Ликтей В. В. Моделювання магнітного поля у вентиляльному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2016. № 256. С. 178–186. (Особистий внесок – удосконалено математичну модель розрахунку характеристик магнітного поля у вентиляльному електродвигуні із закритими пазами з урахуванням нелінійної магнітної характеристики шляхом модифікації ядер інтегральних рівнянь в напрямі

зменшення складових, що містять функцію $grad\mu$).

5. Zhylytsov A., Lyktei V. Magnetic field calculation of brushless direct current motor with smooth stator by secondary sources method. *Technical Electrodynamics*. 2018. № 5. Pp. 7–10. (Особистий внесок – розроблено математичну модель вентильного двигуна з висококоерцитивними постійними магнітами, в основі якої лежить метод вторинних джерел, що дав змогу завдання визначення розподілу магнітної проникності у ферромагнітних елементах двигуна звести до розв'язання системи інтегральних рівнянь для густини простого шару й густини об'ємних магнітних зарядів. Запропоновано ітераційний метод знаходження магнітної проникності з урахуванням її нелінійної залежності).

6. Zhylytsov, A., Kondratenko, I., Lyktei, V., Usenko, S. The magnetic field calculation in electromechanical systems with saturated ferromagnetic structural elements. *Przegląd Elektrotechniczny*. 2020. 97(1). pp. 69–72. (Особистий внесок – розроблено метод розрахунку характеристик магнітного поля в електромеханічних системах з тонкими перекладками на основі зведення початково-крайової задачі для рівнянь Максвелла до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь з подальшим її чисельним розв'язуванням).

ПРОДОВЖ. ДОД. А
АПРОБАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні положення роботи викладено та обговорено на науково-практичних конференціях різного рівня:

1. IV Міжнародна науково-практична конференція «Актуальні питання сталого розвитку сільськогосподарського виробництва» (Бережани, 24–25 квітня 2014 р., форма участі – усна доповідь);

2. XV Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми енергоресурсозбереження в електротехнічних системах. Наука, освіта і практика» (Кременчук, 14–16 травня 2014 р., форма участі – усна доповідь, публікація тез);

3. II Міжнародна науково-практична конференція молодих вчених «Відновлювальна енергетика, новітні автоматизовані технології в біотехнічних системах АПК» (Київ, 16–17 жовтня 2014 р., форма участі – усна доповідь, публікація тез);

4. Науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів «Підсумки науково-дослідних робіт 2014 року» (Київ, 22–23 квітня 2015 р., форма участі – усна доповідь);

5. Семінар «Електротехнології та електрообладнання в системі біоресурсів і природокористування» Наукової Ради з проблеми «Наукові основи електроенергетики» Інституту електродинаміки НАН України (Київ, травень 2015 р., форма участі – усна доповідь)

6. III Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування (теорія, практика, історія, освіта)» (Київ, 14–18 грудня 2015 р., форма участі – публікація тез);

7. Семінар «Електротехнології та електрообладнання в системі біоресурсів і природокористування» Наукової Ради з проблеми «Наукові основи електроенергетики» Інституту електродинаміки НАН України (Київ, грудень 2015 р., форма участі – усна доповідь)

8. IV Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми сучасної

енергетики і автоматики в системі природокористування (теорія, практика, історія, освіта)» (Київ, 10–14 травня 2016 р., форма участі – публікація тез);

9. V Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування (теорія, практика, історія, освіта)» (Київ, 14–18 листопада 2016 р., форма участі – публікація тез);

10. XV Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми сучасної електротехніки - 2018» (Київ, 04–08 червня 2018 р., форма участі – усна доповідь).

11. VII Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми сучасної енергетики і автоматики в системі природокористування (теорія, практика, історія, освіта)» присвячена 120-річчю НУБіП України (Київ, 23–27 травня 2018 р., форма участі – публікація тез);

12. Науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів «Підсумки науково-дослідних робіт 2017 року» присвячена 120 річниці НУБіП України (Київ, 19–20 квітня 2018р., форма участі – усна доповідь).

ДОДАТОК Б

АКТ ПРО ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ КАНДИДАТСЬКОЇ ДИСЕТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

1

ПОГОДЖЕНО:

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Проректор з наукової роботи та
інноваційної діяльності
НУБіП України

Заступник директора Інститута
електродинаміки НАН України
з наукової роботи

Вадим Кондратюк

« 12 » _____ 2023 р.



Іван Шаповал

« 13 » _____ 2023 р.



М.П.

А К Т про використання результатів кандидатської дисертаційної роботи

Даним актом стверджується, що результати дисертаційної роботи на тему
“Удосконалення способу формування ядер інтегральних рівнянь в методі
вторинних джерел для аналізу магнітних полів в нелінійних середовищах”

що представлена на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за
спеціальністю 05.09.05 – «Теоретична електротехніка»

виконана Ликтей Вікторією Володимирівною
(ПІБ здобувача)

використано в Інституті електродинаміки Національної академії наук України
(назва підприємства, де здійснювалось впровадження)

1. Вид впроваджуваних результатів: аналіз геометрії розташування
ферромагнітних електропровідних труб у завантаженні, що дозволило врахувати
симетрію електромагнітного поля і скоротити кількість шуканих змінних
інтегральних рівнянь.

(методика, рекомендації, пропозиції, модель, експериментальні дані тощо)

2. Новизна отриманих результатів: вдосконалено математичну модель
електромагнітних процесів у нелінійних ферромагнітних середовищах, в основі
якої лежить метод вторинних джерел, у напрямку спрощення виду ядер
інтегральних рівнянь для густини об'ємних електричних зарядів за рахунок
зменшення кількості складових, що містять $grad_{\Omega} \mu$.

(патенти, авторські свідоцтва тощо)

3. Практичне впровадження/використання результатів: у відповідності з
виконаними розрахунками проведено чисельний експеримент по встановленню
співвідношень потужності електромагнітного індуктора з кількістю

ферромагнітних труб, що є завантаженням теплогенератора.

(місце впровадження/застосування)

4. Значущість отриманих результатів: результати наукових досліджень, що проведено в роботі, реалізувались у вигляді дослідного зразка електротехнічної системи для нагріву повітря до заданої температури.

(економічний, соціальний, науково-технічний ефект)

5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами: робота виконувалась відповідно до планів Держбюджетних НДР, затверджених Президією НАН України, та пов'язана з наступною НДР «Розвиток теорії електрофізичних процесів в імпульсних системах електромагнітної обробки електропровідних середовищ («Бар'єр-2»)» № ДР 0117U007714

(назва, № держреєстрації)

**Від Національного
університету біоресурсів і
природокористування України**

Начальник науково-дослідної
частини


(підпис)

В. В. Отченашко


«12»

04

2023 р.

**Від інституту електродинаміки
Національної академії наук
України**

Завідувач відділу
електромагнітних систем


(підпис)

І. П. Кондратенко

«13»

04

2023 р.

Заступник директора з наукової роботи
ННІ енергетики, автоматики і
енергозбереження


(підпис)

М.М. Заблодський

«11»

04

2023 р.

Здобувач


(підпис)

В.В. Ликтей

«11»

04

2023 р.

ДОДАТОК В
ДОВІДКА ПРО ЗВ'ЯЗОК ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ З НАУКОВО-
ДОСЛІДНОЮ РОБОТОЮ

ДОВІДКА

Видана Ликтей Вікторії Володимирівні про те, що її дисертаційна робота на тему «Удосконалення способу формування ядер інтегральних рівнянь в методі вторинних джерел для аналізу магнітних полів в нелінійних середовищах», представлена на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.09.05 – теоретична електротехніка, виконана у рамках бюджетної НДР кафедри електропривода та електротехнологій ім. проф. С.П. Бондаренка Національного університету біоресурсів і природокористування України № 110/508-пр «Розробка методів і засобів підвищення енергоефективності і екологічної безпеки електрообладнання в технологіях АПК» (номер державної реєстрації 0115U003344) протягом 2015-2016рр.

Дисертантка В.В. Ликтей була виконавцем окремих підрозділів вищезазначеної теми. У межах НДР № 110/508-пр дисертанткою у підрозділі «Проведення теоретичних і експериментальних досліджень електромагнітних та електромеханічних процесів в електроприводі електротехнічного комплексу знезаражуючої та передпосівної обробки зерна» розроблені нова математична модель і відповідний розрахунковий метод для чисельного розрахунку магнітного поля в безколекторному двигуні постійного струму з неявнополюсним гладким статором, що містить тонкі феромагнітні перекладки між обмоткою статора і зазором між статором та ротором, та явнополюсним ротором з постійними магнітами, що дозволяють враховувати нелінійні властивості феромагнітних елементів магнітної системи двигуна.

Керівник НДР №110/508-пр,
 доктор технічних наук, професор

Заступник директора
 з наукової роботи ННІ енергетики,
 автоматики і енергозбереження,
 доктор технічних наук, професор

